

*Дж.В.Юнг*

# ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

PROJECTIVE  
GEOMETRY

By

JOHN WESLEY YOUNG

*Professor of Mathematics, Dartmouth  
College*

1938

Дж. В. ЮНГ

# ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО  
ПОД РЕДАКЦИЕЙ

проф. В. Ф. КАГАНА

1949

*Государственное издательство*  
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
*Москва*



## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

На русском языке имеются обстоятельные оригинальные сочинения по проективной геометрии, излагающие предмет с необходимой полнотой и строгостью: книги Н. А. Глаголева\*, Н. В. Ефимова\*\*. Из кратких руководств, несомненно, интересна книга О. Вольберга\*\*\*.

При всем том выпускаемая ныне на русском языке небольшая книга Юнга имеет своеобразные особенности, несомненно, делающие ее интересной для советского читателя.

В 1910 г. американские геометры О. Веблен и Дж. Юнг выпустили первый том обширного сочинения по проективной геометрии; в 1918 г. за ним последовал второй том этого сочинения (составленный одним Вебленом).

Несмотря на большой размер, сочинение получило широкое распространение; уже в 1916 г. появилось второе издание первого тома. Это сочинение в настоящее время считается лучшим трактатом по проективной геометрии. Оно составлено в строго выдержанном стиле как в смысле точности логической дедукции, так и по обстоятельности его изложения.

В двадцатых годах текущего столетия в Америке возникла серия небольших математических монографий („Математические монографии Карусов“). Цель этих монографий заключалась в том, чтобы дать такое изложение основных математических дисциплин, которое было бы доступно не только преподавателям и студентам, специализирующимся по математике, но также и научным работникам других отраслей знания. В особенности книги эти предназначены для широкого круга читателей, имеющих скромные познания только в области элементарной

---

\* Н. А. Глаголев, Проективная геометрия, ГТТИ, М.—Л., 1936.

\*\* Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, ГТТИ, М.—Л., 1945.

\*\*\* О. Вольберг, Основные идеи проективной геометрии, ОНТИ, М.—Л., 1935.

математики и желающих расширить свои сведения без изучения журнальной литературы и обширных трактатов.

Дж. Юнгу было предложено составить для этой серии небольшую монографию по проективной геометрии. В результате в 1930 г. появилась его книга „Проективная геометрия“. Автор в этом сочинении не всегда сохраняет выдержанную строгость дедукции и полноту в изложении материала. Автор и сам говорит, как в предисловии, так и в тексте книги, что он не избегал, где считал это необходимым, пользоваться наглядными представлениями, к которым привык читатель, владеющий элементарной геометрией, и что он иногда опускал детали доказательства. При всем том книга заслуживает того, чтобы быть изданной на русском языке. Автор в каждой главе отчетливо выделяет принципиальную сторону вопроса, в частности, он хорошо выясняет роль проективной группы. Автор дает также очерк того развития, которое проективная геометрия получила в настоящее время; он излагает построение метрики (эвклидовой и неэвклидовой) на проективной основе. Книга, на наш взгляд, интересна для читателей трех категорий. Первую категорию составляют лица, которые имеют в виду еще проштудировать обстоятельное сочинение по проективной геометрии и желают предварительно уяснить себе общее содержание дисциплины. Вторую категорию составляют те, которые уже такое обстоятельное сочинение проштудировали и теперь желают в кратком обзоре охватить его содержание. Наконец, третью категорию составят многочисленные читатели, которые не штудировали и не собираются штудировать обстоятельный трактат по проективной геометрии, а хотят уяснить себе общее содержание этой дисциплины, ее материал и ее методы. Читатели всех этих категорий, несомненно, с интересом прочитают книгу Юнга и достигнут цели, которую они имели в виду.

Конечно, при малых размерах монографии автор ограничивается кратким изложением там, где требовалось бы более подробное рассуждение. И местами эта сжатость, особенно в последней главе, действительно может затруднить чтение. Поэтому в некоторых местах я считал полезным поместить в виде примечаний дополнительные разъяснения.

*Проф. В. Каган.*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

К изложению проективной геометрии можно подойти различными путями — аксиоматическим или на основе интуиции, синтетическим или аналитическим, метрическим или чисто проективным.

Мне кажется, что в сочинении, которое должно дать первое приближение к предмету, изложение должно основываться на интуиции, а содержание должно развертываться при помощи синтетических методов: проективные и метрические свойства должны быть четко разграничены. В соответствии с этой точкой зрения читатель найдет в первых пяти главах систематическое и вполне элементарное изложение большей части основных предложений проективной геометрии, получающих свое завершение в теоремах Паскаля и Брианшона и в учении о взаимных полях, связанных с коническим сечением. Я ставил себе задачей изложить в этих главах, опираясь на интуитивные соображения, понятие и свойства проективного пространства без какого-либо обращения к метрическим идеям. Только таким путем, я полагаю, читатель может получить ясное представление о содержании того, что разумеется под словами „проективная геометрия“.

Однако сочинение по проективной геометрии, ставящее себе целью достаточный охват предмета, не может на этом остановиться. Изящество и ценность предмета лежат в большой степени в его отношении к метрическим геометриям, и поэтому необходимо по крайней мере заложить основы аналитических методов. В связи с этим я посвящаю остальные главы этим дополнительным аспектам, для того чтобы дать полную картину предмета. Гл. VI, посвященная первому введению метрических специализаций проективных теорем, сохраняет почти везде элементарный характер. Однако, начиная с гл. VII, изложение

требует от читателя несколько более высокой математической подготовки, так как оно основывается на понятии группы. За вступительной гл. VII следуют гл. VIII, содержащая основы аналитических методов, и гл. IX, рассматривающая метрические свойства с более общей точки зрения группы, к которой принадлежит та или иная геометрия.

При составлении настоящего сочинения я, разумеется, свободно пользовался трудом О. Веблена и моим „Проективная геометрия“, т. I, II (т. II принадлежит только О. Веблену). Весьма полезной при написании некоторых частей этой книги была для меня книга Севери „Проективная геометрия“.

*Дж. В. Юнг.*

Ганновер, Нью-Гемпшир. Ноябрь, 1929 г.



## ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

**1. Перспективное рисование.** Проективная геометрия, подобно многим другим математическим дисциплинам, обязана своим происхождением следующей практической задаче: нарисовать на плоскости изображение трехмерного объекта таким образом, чтобы различные части изображения в их взаимном расположении представлялись нам в таком же виде, как и соответствующие им видимые части объекта. Впервые научным исследованием этой задачи занимался Леонардо да Винчи (1452—1519); прославленный художник, он был в то же время, как мы теперь это знаем, и одним из великих пионеров науки.

Геометрически эта задача в постановке Леонардо может быть сформулирована следующим образом. Из каждой видимой точки некоторого трехмерного объекта луч света попадает в глаз наблюдателя; если поместить между глазом и объектом прозрачную пластинку, то каждый луч пересечет пластинку в определенной точке, которая будет служить изображением соответствующей точки объекта. Совокупность всех таких точек на пластинке и образует требуемое изображение. Задача заключается в том, чтобы найти способ получить то же изображение без помощи прозрачной пластинки. Заметим, между прочим, что фотографическая камера решает в точности ту же задачу, собирая лучи света своей линзой, так сказать — „глазом камеры“, и проектируя их на светочувствительную пластинку. То обстоятельство, что при этом пластинка находится не впереди глаза, а позади его, очевидно, не имеет существенного значения.

**2. Проектирование и сечение. Соответствие.** Исследуя более детально только что описанный процесс, мы ознакомимся с одним из основных процессов проективной геометрии и одновременно получим представление о некоторых

особенностях этой геометрии, отличающих ее от более знакомой нам так называемой метрической геометрии, которую мы изучали еще в школе.

Чисто геометрическое описание процесса, предложенного Леонардо, состоит из двух частей: из точки  $O$  проводятся прямые линии к каждой точке геометрической фигуры  $F$ ; эти прямые линии, исходящие из точки  $O$ , пересекаются плоскостью  $\omega$ . Дадим теперь точное определение этого процесса.

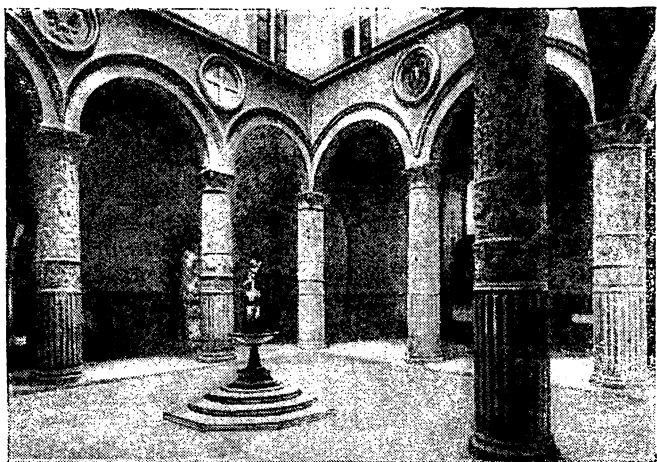
Проведение прямых линий, соединяющих точку  $O$  со всеми точками фигуры  $F$ , называется *проектированием фигуры  $F$  из точки  $O$* . Если совокупность прямых, исходящих из точки  $O$ , пересекается плоскостью  $\omega$ , то совокупность точек пересечения этих прямых с плоскостью  $\omega$  называется *сечением прямых линий*, проходящих через точку  $O$ , *плоскостью  $\omega$* .

Проектирование и сечение являются одними из основных построений проективной геометрии. При помощи этого построения каждой точке фигуры  $F$  ставится в соответствие определенная прямая, проходящая через точку  $O$  и, вообще говоря, каждой прямой, проходящей через точку  $O$ , ставится в соответствие определенная точка плоскости  $\omega$ . Некоторые исключения из этого положения, которые могут встретиться, будут вскоре рассмотрены. Введенное нами понятие о соответствии между элементами двух фигур имеет фундаментальное значение, поэтому мы дадим ему точное определение.

Говорят, что между элементами двух геометрических фигур установлено *взаимно однозначное соответствие*, если каким-либо образом (например, с помощью только что описанного процесса проектирования и сечения) каждому элементу одной фигуры поставлен в соответствие (отнесен) один и только один элемент другой фигуры и если при этом, обратно, каждый элемент второй фигуры отнесен к одному и только одному элементу первой фигуры.

Если мы теперь вернемся к нашей задаче перспективного рисования, то увидим, что изображение на прозрачной пластинке, помещенной между объектом и глазом художника, представляет собой фигуру, получающуюся при помощи проектирования из глаза наблюдателя и сечения проектирующих лучей плоскостью прозрачной пластинки. Если читатель

детально исследует какое-нибудь перспективное изображение, например помещенную здесь фотографию двора Палаццо Веккио во Флоренции, то он заметит следующие особенности. Прямые линии оригинала изображены на фотографии также прямыми линиями. Это вполне естественно, так как все точки оригинала, лежащие на одной какой-нибудь прямой, лежат в то же время в плоскости, проходящей через эту прямую и центр проекции  $O$ , а ее сечение другой плоскостью также



Ф и г. 1

представляет собой прямую линию. Пересечение двух прямых линий, т. е. точка оригинала, будет представлено на фотографии пересечением двух соответствующих прямых линий. Угол на оригинале будет изображен на фотографии также углом, но, вообще, *уже иной величины*. Например, прямой угол оригинала может быть представлен на изображении острым или тупым углом. Читатель может видеть на фотографии многочисленные примеры этого. Он не должен, однако, довольствоваться простым наблюдением этого факта, но должен уяснить себе причину этого, исходя из характера процесса проектирования и сечения. То же замечание относится и к дальнейшему.

Две параллельные линии оригинала не будут, вообще говоря, представлены на рисунке параллельными линиями; равным расстояниям на оригинале не будут, вообще говоря, соответствовать равные расстояния на рисунке; перспективное изображение круга обычно будет представлять собой не круг, а эллипс и т. д.

Отсюда ясно, что перспективное изображение объекта содержит весьма значительные искажения; однако, во всех случаях точки изображаются точками и прямые линии — прямыми (за исключением того случая, когда прямая линия исходной фигуры проходит через точку  $O$ ).

Внимательный читатель заметит, однако, что описанный выше способ изображения трехмерного объекта на плоскости не дает, вообще говоря, взаимно однозначного соответствия между точками объекта и точками его изображения на плоскости. Именно, двум точкам объекта, лежащим на прямой, проходящей через точку  $O$ , будет на изображении соответствовать одна и та же точка; точно так же двум прямым объекта, лежащим в какой-либо плоскости, проходящей через точку  $O$ , будет на изображении отвечать одна и та же прямая. Однако в том случае, если *все элементы исходной фигуры лежат в одной плоскости\**, процесс проектирования и сечения устанавливает, вообще говоря, между элементами двух фигур взаимно однозначное соответствие. Такого рода соответствие получит более точное определение в ближайших параграфах. Пример этого можно найти на фотографии, если сосредоточить свое внимание на какой-нибудь одной плоскости изображаемого объекта.

**3. Проективные преобразования.** Пусть  $F$  есть некоторая фигура, и мы проектируем ее из точки  $O$ , не лежащей в плоскости фигуры. В сечении проектирующих прямых некоторой плоскостью мы получим новую фигуру  $F'$ . Установленное таким образом соответствие между элементами фигур  $F$  и  $F'$  называется *перспективным преобразованием* или *перспективным соответствием*. Если мы будем теперь проектировать фигуру  $F'$  из нового центра  $O'$  на третью плоскость, то получим в результате новую фигуру  $F''$ . Фигура  $F''$

---

\* Конечно, не проходящей через центр проекции. (Прим. ред.)

получена из фигуры  $F$  при помощи двух последовательных перспективных преобразований. Подобным же образом мы можем рассматривать результат любого числа последовательных перспективных преобразований. Это приводит к следующему определению.

Результат некоторой последовательности перспективных преобразований называется *проективным преобразованием*, или *проективным соответствием*.

Проективное соответствие лежит в основе всей проективной геометрии. После определения этого понятия мы можем дать следующее определение проективной геометрии: *проективная геометрия — наука, изучающая те свойства фигур, которые не меняются при проективных преобразованиях*.

Отсюда непосредственно следует, что понятия параллельности прямых линий, равенства расстояний и углов не находят себе места в проективной геометрии, поскольку эти свойства не сохраняются при проективных преобразованиях. Параллельные прямые преобразуются, вообще говоря, в пересекающиеся, равные расстояния — в неравные, прямые углы — в острые или тупые и т. д. С другой стороны, точки и прямые при проективном преобразовании всегда переходят соответственно в точки и в прямые, независимо от того, сколько операций проектирования и сечения было произведено при осуществлении проективного преобразования; при этом, если точка  $A$  лежит на прямой  $l$  фигуры  $F$ , то соответствующая ей в проективном преобразовании точка  $A'$  будет лежать на прямой  $l'$ , соответствующей прямой  $l$ ; и наоборот, если точка  $A$  не принадлежит прямой  $l$ , то и точка  $A'$  не будет лежать на прямой  $l'$ . Двум пересекающимся прямым будут соответствовать две пересекающиеся прямые, треугольнику — соответствовать треугольник, четырехстороннику — четырехсторонник и т. д. Некоторые возможные исключения из высказанных выше положений, которые вдумчивый читатель может обнаружить самостоятельно, будут, как мы уже говорили, рассмотрены в скором времени. Из сказанного достаточно ясно, что свойства, касающиеся только *инцидентности\** (принадлежности) точек и прямых, суть

\* Точка  $A$  и прямая  $l$  называются *инцидентными*, если точка  $A$  лежит на прямой  $l$  или, что то же, если прямая  $l$  проходит через точку  $A$ . (Прим. ред.)

*свойства проективные* (сохраняющиеся при проективных преобразованиях), те же свойства, которые связаны с измерением, т. е. *метрические свойства*, чужды проективной геометрии как таковой. В дальнейшем мы увидим, однако, как некоторые метрические свойства могут быть получены из проективных свойств при помощи специального процесса (см. гл. VI настоящей книги).

Треугольник, как было сказано выше, является образом проективной геометрии, но равносторонний, или равнобедренный, или прямоугольный треугольники не являются таковыми, так как эти их свойства не сохраняются при проективных преобразованиях. Четырехсторонник также есть образ проективной геометрии, но параллелограмм, прямоугольник, квадрат и т. п. таковыми не являются. Мы увидим ниже, что конические сечения вообще являются образом проективной геометрии, но их подразделение на гиперболу, эллипс и параболу не может быть проведено исключительно проективными средствами.

На первый взгляд может показаться, что, ограничиваясь рассмотрением только проективных свойств, мы в такой мере суживаем поле наших операций, что содержание проективной геометрии становится весьма ограниченным. Однако, как вскоре станет ясным, это не так. Ограничиваясь рассмотрением проективных свойств, мы получаем геометрию значительно более простой структуры, нежели геометрия, которая рассматривает дополнительно еще и метрические свойства фигур. В самом деле, как уже было указано, проективная геометрия при соответствующей специализации ее предложений полностью охватывает содержание обычной эвклидовой геометрии и даже содержание некоторых неевклидовых геометрий. Этого рода соображения, смысл которых непосвященный читатель сможет гораздо лучше понять, когда он дойдет до конца этой книги, чем это для него возможно сейчас, заставили английского математика Кэли воскликнуть: „Проективная геометрия есть вся геометрия!“ Выяснить, в каком смысле эти знаменитые слова справедливы, составляет одну из основных задач этой небольшой книги.

**4. Проективная теорема.** Читателю, впервые приступающему к изучению проективной геометрии, могут показаться

странными геометрические предложения, не содержащие метрических соотношений. Следующее предложение, известное под названием *теоремы Дезарга* о перспективных треугольниках, имеет фундаментальное значение для систематического построения некоторых частей проективной геометрии, которому посвящены последующие главы.

*Если у двух данных треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  три точки попарного пересечения соответственных сторон  $AB$  и  $A'B'$ ,  $BC$  и  $B'C'$ ,  $CA$  и  $C'A'$  расположены на одной прямой, то прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ , соединяющие соответственные вершины этих треугольников, проходят через одну и ту же точку (или параллельны между собой).* Фраза, заключенная в скобки, необходима, поскольку мы формулируем теорему для так называемого метрического пространства обычной геометрии; она становится излишней в проективном пространстве, которое мы введем в следующей главе; сама теорема к тому же приобретает при этом большую общность.

Заметим, что мы имеем здесь дело с предложением, которое заключает в себе утверждения только относительно инцидентности точек и прямых; оно не содержит никаких метрических соотношений. Точное доказательство этой теоремы мы дадим позднее (стр. 39). Хорошим упражнением для пространственного воображения может служить рассмотрение того случая, когда треугольники расположены в разных плоскостях. Теорема в этом случае становится почти очевидной. Если читатель путем упражнения достигнет того, что будет ясно представлять себе две пересекающиеся плоскости с расположенными на них треугольниками, соответственные стороны которых пересекаются в точках, лежащих на одной прямой (последняя должна быть, очевидно, прямой пересечения обеих плоскостей), то заключение теоремы следует почти непосредственно. В самом деле, каждая пара прямых  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  лежит в некоторой плоскости, а эти три плоскости должны пересекаться в одной точке (или по параллельным прямым, или по одной прямой). Представим себе теперь, что одна из двух плоскостей, в которых расположены треугольники, вращается вокруг прямой их пересечения до ее совпадения со второй плоскостью. Это делает теорему, по меньшей мере, вероятной и для того случая, когда треугольники расположены в одной плоскости.

Несмотря на то, что проективная геометрия возникла во второй половине пятнадцатого столетия и отдельные предложения геометрии этого рода были доказаны Дезаргом (1593—1662) и Паскалем (1623—1662), все же свое развитие в качестве самостоятельной дисциплины проективная геометрия получила только в труде великого французского математика Понселе (1788—1867), опубликовавшего в 1822 г. свой классический „Трактат о проективных свойствах фигур“. После выхода в свет этого сочинения проективная геометрия получила быстрое развитие и в настоящее время может считаться одной из основных дисциплин современной математики не только в силу разнообразных и важных связей ее со всеми отраслями математики, но и благодаря красоте ее построения и ее заключений.

Этой своей красотой она была в большой степени обязана своей простоте. Последняя зависит не только от освобождения геометрии от сложности различных метрических понятий, но, в меньшей степени, и от введения новой концепции пространства. Определение понятия „проективного“ пространства составляет содержание следующей главы, после чего мы сможем приступить к систематическому изложению предмета в тех рамках, которые допускает небольшой объем настоящего сочинения.

**Источники.** Кроме уже упомянутого классического труда Понселе, читатель, интересующийся историческим развитием проективной геометрии, может обратиться к сочинению Ш а л ь\* (Chasles), *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Paris, 1837, а также к различным частям книги Д. С м и т а (D. E. Smith), *Source Book in Mathematics*, New York, 1929.

---

\* Имеется русский перевод: Ш а л ь, Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов, т. I, История геометрии, М., 1883. См. также отдельные главы сочинений Ц е й т е н а, История математики в XVI—XVIII веках, ОНТИ, М.—Л., 1938, и Ф. К л е й н а, Лекции о развитии математики в XIX столетии, ОНТИ, М.—Л., 1937. (Прим. ред.)

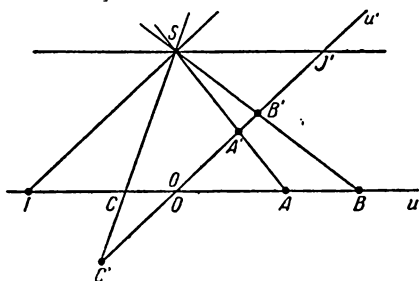


## Г Л А В А II

### ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

**5. Идеальные элементы.** В предыдущей главе мы уже упомянули о том, что свойство взаимной однозначности перспективного соответствия в метрическом пространстве допускает некоторые исключения. В настоящей главе мы прежде всего исследуем эти исключения и выясним, каким путем можно их устранить.

Если мы будем рассматривать процесс проектирования и сечения, описанный нами в предыдущей главе в применении к трехмерному пространству, на одной какой-нибудь плоскости, то мы придем к идее перспективного



Ф и г. 2

ного соответствия между точками двух прямых линий на плоскости. Пусть  $u$  и  $u'$  будут две такие линии, и пусть  $S$  есть точка, лежащая в той же плоскости, что и обе прямые, но не принадлежащая ни одной из них; прямые, соединяющие точку  $S$  с точками  $A, B, C, \dots$  прямой  $u$ , пересекут, вообще говоря, прямую  $u'$  в определенных точках  $A', B', C', \dots$ . Каждой точке прямой  $u$ , например точке  $A$ , будет при помощи этого построения однозначно отнесена определенная точка  $A'$ ; точке  $B$  будет соответствовать точка  $B'$ , точке  $C$  — точка  $C'$  и т. д. И обратно, каждой точке прямой  $u'$  будет соответствовать некоторая единственная точка прямой  $u$ . Точка  $O = O'$  пересечения обеих прямых соответствует, очевидно, самой себе. Таким образом установленное соответствие

носит название *перспективного соответствия* между точками прямых  $u$  и  $u'$ ; точка  $S$  называется *центром перспективы*. Говорят также, что точки прямой  $u$  (или  $u'$ ) *проектируются* в точки прямой  $u'$  (или  $u$ ) *из центра  $S$* .

Как уже было сказано, определенное таким образом перспективное соответствие является, вообще говоря, взаимно однозначным. Однако точке  $I$  пересечения прямой  $u$  с прямой, проходящей через центр  $S$  параллельно прямой  $u'$ , не соответствует в нашем обычном понимании никакая точка прямой  $u'$ . Точно так же точка  $J'$  пересечения прямой  $u'$  с прямой, проходящей через центр  $S$ , параллельно прямой  $u$ , не соответствует никакой точке прямой  $u$ . Чтобы избежать этого положения, мы допустим, что на каждой из прямых дополнительно имеется еще по одной точке, а именно, на прямой  $u'$  есть точка  $I'$ , соответствующая точке  $I$ , а на прямой  $u$  — точка  $J$ , которой будет соответствовать точка  $J'$ . В отличие от „обыкновенных“ точек знакомой нам метрической плоскости, мы должны смотреть на новые точки такого рода, как точки  $I'$  и  $J$ , как на „идеальные“\* точки, произвольно введенные на плоскости для определенной цели. Мы представляем себе, что на каждой прямой имеется одна такая идеальная точка. Мы представляем себе также, что все параллельные прямые имеют общую идеальную точку. „Идеальную точку“ прямой называют также ее „бесконечно удаленной точкой“\*\*.

На первый взгляд это может показаться читателю чем то весьма загадочным. Однако вскоре он освоится с этим новым понятием. Следующее замечание, мы надеемся, поможет ему в этом. Две пересекающиеся прямые имеют общую точку. Две параллельные прямые также имеют нечто общее, а именно — их направление. Если мы вместо слов „направление прямой“ условимся говорить „идеальная точка прямой“, то убедимся, что новая терминология столь же понятна, как и старая. Например предложение, выраженное в старой терминологии

---

\* В нашей литературе для обозначения этого рода элементов принят термин „несобственные“. (Прим. ред.)

\*\* Когда точка  $S$  неограниченно приближается к  $I$ , точка  $S'$  неограниченно удаляется от  $O'$ ; этим и объясняется наименование „бесконечно удаленная точка“. (Прим. ред.)

словами „прямая линия однозначно определяется одной своей точкой и своим направлением“, в новой терминологии будет звучать так: „прямая линия однозначно определяется одной своей обыкновенной точкой и своей идеальной точкой“. Обе формулировки имеют в точности одно и то же содержание. То же самое можно сказать и про предложения: две параллельные прямые имеют одно и то же направление (в старой терминологии) и две параллельные прямые имеют одну и ту же идеальную точку (в новой терминологии); если две или более прямых имеют одно и то же направление, то они параллельны (в старой терминологии) и если две или более прямых имеют одну и ту же идеальную точку, то они параллельны (в новой терминологии).

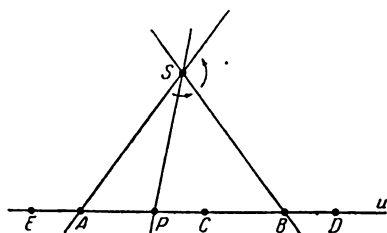
Если мы условимся считать, что каждая прямая линия, помимо своих обыкновенных точек, содержит еще одну идеальную точку, и при этом откажемся от различия между обыкновенными и идеальными точками и будем смотреть на те и другие как на эквивалентные во всех отношениях, то придем к понятию *проективной прямой*. Мы можем теперь понять, почему понятие параллельности в проективной геометрии не имеет места. В проективной геометрии любые две прямые, лежащие в одной плоскости, имеют общую точку, т. е. пересекаются. Поскольку мы не делаем никакого различия между обыкновенными и идеальными точками, для проективной геометрии не имеет значения, будет ли точка пересечения обыкновенной или идеальной.

Мы представляем себе, далее, что совокупность идеальных точек плоскости образует прямую линию, так называемую *идеальную прямую* или *бесконечно удаленную прямую* плоскости. Мы представляем себе, что на каждой плоскости имеется одна такая прямая. Основанием для такого представления служит тот факт, что каждая обыкновенная прямая на плоскости имеет с совокупностью всех идеальных точек одну и только одну общую точку, а это свойство характерно именно для прямой линии.

**6. Проективная плоскость.** Изложенные выше соображения приводят нас к определению проективной плоскости. *Проективная плоскость содержит все обыкновенные точки и прямые метрической плоскости и, кроме того, совокуп-*

ность идеальных точек, относительно которых принимается, что они образуют идеальную прямую, причем каждой обыкновенной прямой принадлежит одна и только одна точка этой совокупности.

На такой проективной плоскости определенное нами выше перспективное соответствие между точками двух прямых будет взаимно однозначным уже без всяких исключений. Точка  $I'$  прямой  $u'$ , соответствующая точке  $I$  прямой  $u$ , есть



Ф и г. 3

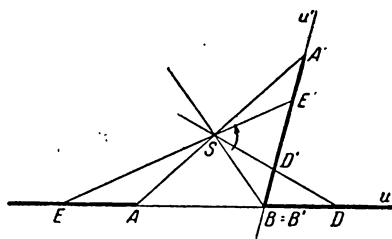
идеальная точка прямой  $u'$ ; точка  $J$  прямой  $u$ , которой соответствует точка  $J'$  прямой  $u'$ , есть идеальная точка прямой  $u$ .

Еще одно следствие введенного нами понятия проективной плоскости заключается в том, что, согласно этому представлению, мы должны смотреть на проективную пря-

мую как на замкнутую линию, подобную окружности огромного радиуса. Положим, что мы имеем прямую  $u$  и центр перспективы  $S$  и будем рассматривать переменную прямую, проходящую через точку  $S$ , как вращающуюся от положения  $SA$  до положения  $SB$  в направлении, указанном стрелкой на прилагаемом чертеже. Переменная прямая пересекает прямую  $u$  в переменной точке  $P$ , которая при непрерывном вращении прямой движется также непрерывно от точки  $A$  к точке  $B$ , описывая отрезок  $ACB$ . Если переменная прямая продолжает вращаться в том же направлении от положения  $SB$  до своего первоначального положения, то переменная точка  $P$ , в которой эта прямая пересекает прямую  $u$ , перемещается по этой прямой непрерывно, так что мы должны рассматривать остальную часть прямой  $BDEA$  как составляющую непрерывный отрезок, подобно отрезку  $ACB$ . Две различные точки  $A$  и  $B$  проективной прямой делят ее на два отрезка совершенно так же, как две различные точки окружности делят эту последнюю на две дуги. Мы представляем себе обе части  $BD$  и  $EA$  соединяющимися в идеальной точке прямой  $u$ . То обстоятельство, что нам трудно представить себе, как это происхо-

дит, не должно смущать читателя. В этом отношении мы находимся не в лучшем положении и в области наших привычных представлений, связанных с метрической плоскостью. В последнем случае мы вынуждены представлять себе дело таким образом, что переменная точка  $P$ , служащая пересечением вращающейся прямой с прямой  $u$ , внезапно перестает существовать (в тот момент, когда вращающаяся прямая становится параллельной прямой  $u$ ), с тем, чтобы мгновение спустя появиться на другом конце прямой. Нарисовать в своем уме картину того, как это происходит, несколько не легче, чем представить себе процесс, связанный с проективной концепцией. Правильный путь для уяснения этих понятий заключается не в том, чтобы пытаться непосредственно представить себе замкнутую, прямую линию, а в усвоении того факта, что проективная прямая ведет себя так, как если бы она была замкнутой.

Новое положение вещей станет для читателя более наглядным, если он заметит, что отрезок, подобный  $BDEA$ , кажущийся разрывным, может быть поставлен в перспектив-

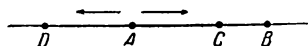


Фиг. 4

ное соответствие с обыкновенным замкнутым отрезком  $B'D'E'A'$ , как это непосредственно видно на фиг. 4. Если прямая, проходящая через точку  $S$ , будет вращаться непрерывно, переходя от положения  $SB$  к положению  $SA' = SA$ , в направлении, указанном стрелкой, то точка пересечения вращающейся прямой с прямой  $u$  будет перемещаться от точки  $B$  через точку  $D$  к точке  $E$  и отсюда к точке  $A$ , в то время как соответствующая точка прямой  $u'$  перемещается от точки  $B (=B')$  через точки  $D'$  и  $E'$  к точке  $A'$ . Соответствующие отрезки начерчены более жирными линиями, чтобы яснее выделялись части, соответствующие друг другу. Эти соображения показывают, кроме того, что на проективной прямой необходимо задать три точки, чтобы однозначно определить на ней отрезок или ее направление. Если задать только две конечные точки отрезка  $A$  и  $B$ , то возникнет сомнение,

какой из двух возможных отрезков имеется в виду; точно так же, если мы будем говорить о направлении  $\overrightarrow{AB}$ , то будет неясно, о каком из двух направлений, показанных стрелками на чертеже, идет речь. Если же мы зададим отрезок  $ACB$  или направление  $\overrightarrow{ACB}$  на прямой тремя точками, то они будут определены однозначно. То же самое можно сказать и относительно отрезка  $ADB$  или направления  $\overrightarrow{ADB}$ .

Прежде чем подойти с помощью аналогичных соображений к понятию о проективном пространстве трех измерений,



Фиг. 5

рассмотрим вкратце некоторые из преимуществ, которые возникают в связи с введением понятия проективной плоскости.

Формулируя в предыдущей главе (стр. 15) теорему

Дезарга, мы были вынуждены сделать в скобках оговорку, чтобы учесть возможность того, что три прямые, соединяющие соответственные вершины  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  треугольников, будут параллельны (а не пересекаются в одной точке). Это произошло потому, что мы формулировали теорему для метрической плоскости. Мы видим теперь, что эта оговорка становится излишней (даже, более того, лишней смысла), когда мы формулируем ту же теорему для двух треугольников в проективной плоскости, поскольку прямые, параллельные между собой в метрической плоскости, на проективной плоскости пересекаются в идеальной точке. Заметим, в связи с этим, что благодаря введению понятия проективной плоскости теорема выигрывает в общности. Это происходит от того, что различные метрические специальные предположения, введенные в условия теоремы, приводят к различным теоремам метрической геометрии. Для примера приведем следующие предложения:

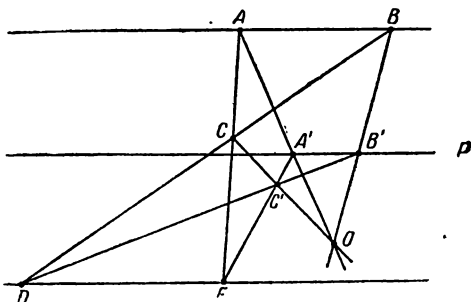
*Если какая-нибудь пара сторон двух треугольников параллельна прямой, соединяющей точки пересечения двух других пар сторон, то прямые, соединяющие соответственные вершины, либо пересекутся в одной точке, либо будут параллельны между собой. Или:*

*Если каждая из сторон одного треугольника параллельна соответственной стороне другого треугольника, то прямые,*

соединяющие соответственные вершины, либо пересекаются в одной точке, либо параллельны между собой\*.

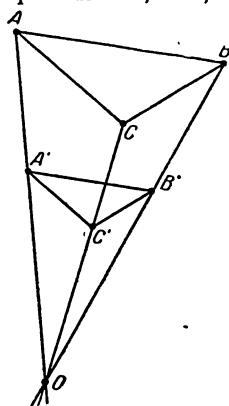
Первое из этих видоизменений вызывается допущением, что одна из точек пересечения есть идеальная точка; второе

\* На фиг. I изображены два „перспективных“ треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$ , однако, в следующем специальном расположении. Соответственные стороны  $AC$  и  $A'C'$  пересекаются в точке  $E$ , стороны  $BC$  и  $B'C'$  — в точке  $D$ ; стороны же  $AB$  и  $A'B'$  параллельны прямой  $DE$ . С проективной точки зрения это значит, что они пересекаются в общей идеальной точке ( $P$ ) прямых  $AB$ ,  $A'B'$  и  $DE$ . Поэтому в проективной плоскости мы находимся в условиях теоремы Дезарга (прямые  $AB$  и  $A'B'$ ,  $BC$  и  $B'C'$ ,  $CA$  и  $C'A'$  пересекаются в точках  $D$ ,  $E$ ,  $P$ , лежащих на одной прямой). Поэтому прямые, соединяющие соответственные вершины  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , пересекаются в одной точке  $O$  (центре перспектив).

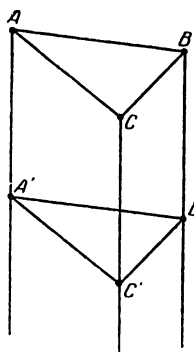


Фиг. I

В метрической плоскости, в которой нет идеальной (бесконечно удаленной) точки  $P$ , этот случай требует специальной формулировки, указанной в тексте (первое предложение); если прямые  $AA'$  и  $BB'$  параллельны, то им параллельна также и прямая  $CC'$ .



Фиг. II



Фиг. III

Прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке  $O$  (фиг. II) или параллельны (фиг. III).

есть результат предположения, что две (а следовательно, и все три) точки пересечения являются идеальными. Читатель имеет здесь пример того, как одна и та же проективная теорема при соответствующей специализации порождает несколько метрических теорем.

Чрезвычайно важным и плодотворным преимуществом новой точки зрения является полная аналогия между точками и прямыми в проективной плоскости. Рассмотрим два следующих предложения геометрии плоскости:

*Каждые две различные точки определяют одну и только одну прямую, на которой они обе лежат.*

*Каждые две различные прямые определяют одну и только одну точку, через которую они обе проходят.*

В метрической плоскости первое из этих предложений всегда справедливо, второе же не имеет места в том случае, когда прямые параллельны. Напротив, в проективной плоскости оба предложения справедливы во всех случаях без исключения. Именно, если прямые, о которых идет речь во втором предложении, параллельны, то они опять-таки определяют одну и только одну точку (идеальную), через которую они обе проходят. Предложение остается справедливым и в том случае, когда одна из прямых есть идеальная прямая. Обе прямые не могут одновременно быть идеальными, поскольку в проективной плоскости существует единственная идеальная прямая. В отношении первого предложения, имеющего место в метрической плоскости, нам нужно было бы еще рассмотреть случай, когда одна или обе заданные точки являются идеальными. Однако справедливость предложения в каждом из этих двух случаев очевидна.

Вдумываясь теперь в зависимость между формулировками этих двух предложений, мы увидим, что с помощью простой замены в одном из них слова „точка“ словом „прямая“, и обратно, мы получим другое, если не считать того, что последняя часть предложения после такой замены будет звучать несколько необычно. В самом деле, произведя указанную замену в первом предложении, мы получим: „две различные прямые определяют одну и только одну точку, на которой они обе лежат“. То обстоятельство, что последняя часть фразы



звучит для нас необычным образом, происходит, однако, только от несовершенства нашего языка. По существу, слова „точка лежит на прямой“ и „прямая проходит через точку“ выражают совершенно одно и то же соотношение между ними. Безупречный язык должен был бы выразить эти тождественные отношения одними и теми же словами. Мы можем, например, выразить это отношение точки и прямой словами „точка *принадлежит* прямой“ или „прямая *принадлежит* точке“, или словами „точка и прямая *инцидентны*“\*. Эта терминология, при которой, кстати сказать, смысл предложений остается совершенно ясным и в тех случаях, когда старая терминология звучит неотчетливо, позволяет перейти от одного предложения к другому с помощью механической замены слов „точка“ и „прямая“ друг другом.

*Две различные точки  
определяют одну и только  
одну прямую, с ними инци-  
дентную.*

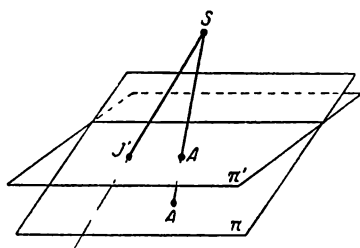
*Две различные прямые  
определяют одну и только  
одну точку, с ними инци-  
дентную.*

Отмеченная нами аналогия в той роли, которую в плоской геометрии играют точки и прямые, служит источником чрезвычайно плодотворного принципа современной математики, так называемого принципа двойственности. Согласно этому принципу все предложения плоской проективной геометрии предстают в виде пар двойственных друг другу предложений; другими словами, из каждого предложения плоской проективной геометрии мы можем получить другое предложение, в котором слово „точка“ будет заменено словом „прямая“, и обратно. Этот принцип представляет собой частный случай так называемого принципа двойственности в пространстве. Мы остановимся на этом более обстоятельно после изложения основных свойств проективного пространства, к рассмотрению которых мы теперь переходим.

---

\* Выражение „прямая принадлежит точке“ по-русски тоже звучит непривычно. Существует международный термин „прямая и точка инцидентны“, одинаково выражающий, что точка лежит на прямой или что прямая проходит через точку. Этим термином мы далее часто будем пользоваться. (*Прим. ред.*)

**7. Проективное пространство.** Введение понятий идеальных точек и прямых на плоскости подготовило нас к введению идеальных элементов в пространстве трех измерений. Мы можем поэтому ограничиться более кратким их описанием, чем если бы мы встречались с ними впервые. Будем рассматривать перспективное соответствие между двумя плоскостями  $\pi$  и  $\pi'$ , устанавливаемое проектированием из центра  $S$ , не лежащего ни в одной из этих



Ф и г. 6

плоскостей; заданной точке  $A$  плоскости  $\pi$  будет соответствовать точка  $A'$  плоскости  $\pi'$ , в которой прямая  $SA$  пересекает эту плоскость. Однако мы тотчас заметим, что точке  $I$  плоскости  $\pi$ , для которой прямая  $SI$  будет параллельна плоскости  $\pi'$ , не соответствует (в метрическом пространстве) никакая точка

$I'$  последней. Все прямые  $SI$ , параллельные плоскости  $\pi'$ , лежат в плоскости, проходящей через точку  $S$  и параллельной плоскости  $\pi'$ . Пусть эта плоскость пересекает плоскость  $\pi$  по линии  $i$ . Для всех точек прямой  $i$  мы вводим в качестве соответствующих им идеальные точки  $I'$ , образующие (по определению) идеальную прямую  $i'$  плоскости  $\pi'$ . Подобным же образом, плоскость, проходящая через точку  $S$  и параллельная плоскости  $\pi$ , пересекает плоскость  $\pi'$  по прямой  $j'$ , соответственно которой мы вводим на плоскости  $\pi$  прямую  $j$ , содержащую все точки  $J$ , соответствующие точкам  $J'$  прямой  $j'$ . Установленное таким образом перспективное соответствие будет взаимно однозначным без всяких исключений.

Заметим, что мы пришли в точности к тому же понятию проективной плоскости, к которому привело нас ранее рассмотрение перспективного соответствия на плоскости. Мы, таким образом, естественно пришли к тому представлению, что каждая плоскость в проективном пространстве есть не что иное, как проективная плоскость, полученная из метрической плоскости путем присоединения к ней идеальных точек, лежащих на единственной идеальной прямой. Чтобы полностью установить понятие проективного пространства,

необходимо еще только указать, что мы представляем себе все идеальные точки и идеальные прямые пространства лежащими в одной *идеальной плоскости*. Иными словами, *трехмерное проективное пространство* получается из обыкновенного метрического путем присоединения к последнему точек и прямых идеальной плоскости, причем на каждой обыкновенной прямой лежит одна такая идеальная точка и на каждой обыкновенной плоскости — одна такая идеальная прямая. Совокупность всех параллельных прямых в пространстве имеет одну и ту же общую идеальную точку, совокупность всех параллельных между собой плоскостей — одну и ту же общую идеальную прямую.

Мы имеем теперь отправную точку для ясного понимания основных свойств инцидентности точек, прямых и плоскостей в проективном пространстве. Мы будем формулировать их парами предложений, чтобы выявить присущую им двойственность, которую рассмотрим специально несколько позже.

1. *Две различные точки определяют одну и только одну прямую, на которой они обе лежат.*

1'. *Две различные плоскости определяют одну и только одну прямую, через которую они обе проходят.*

Читателю следует в связи с этим уяснить себе, как эти предложения выражают знакомые ему соотношения обыкновенной метрической геометрии; следует рассмотреть различные возможные случаи параллельности, потребовавшие от нас введения идеальных элементов для построения проективного пространства. Так, например, предложение 1' выражает знакомое нам положение стереометрии о том, что каждые две непараллельные плоскости образуют в пересечении прямую линию. Оно содержит, кроме того, представление о том, что две параллельные плоскости проходят через одну и ту же идеальную прямую и что любая обыкновенная плоскость имеет с идеальной плоскостью общую прямую. Предложение 1, кроме обычного утверждения, что две различные обыкновенные точки определяют прямую линию, содержит еще представление о том, что одна обыкновенная точка вместе с идеальной точкой также определяет некоторую прямую, и также то, что две различные идеальные точки определяют идеальную прямую.

2. Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют одну и только одну плоскость, на которой они все лежат.

2'. Три плоскости, не проходящие через одну прямую, определяют одну и только одну точку, через которую они все проходят.

В том случае, когда никакие две из трех плоскостей не параллельны между собой, предложение 2' есть хорошо знакомая нам теорема стереометрии, в предположении, что линии пересечения плоскостей также не параллельны; предложение, однако, остается в силе и в том случае, когда линии пересечения плоскостей параллельны между собой, так как при этом три плоскости определяют идеальную точку. Если какие-либо две из трех плоскостей параллельны между собой и образуют в пересечении с третьей плоскостью обыкновенные прямые, то эти последние, будучи параллельны друг другу, однозначно определяют идеальную точку, общую всем трем плоскостям. Если же все три плоскости параллельны между собой, то они проходят через одну и ту же идеальную прямую и, следовательно, не удовлетворяют условию теоремы. Можно указать и другие специальные случаи; мы предлагаем читателю найти их самому и убедиться, что предложение остается справедливым во всех случаях. Читателю следует таким же образом проанализировать и предложение 2, а именно, рассмотреть случаи, когда все три точки являются обыкновенными точками, когда две из них обыкновенные и одна идеальная, когда одна из них обыкновенная и две идеальные и, наконец, когда все три точки — идеальные. Читателю следует проанализировать таким же образом и приводимые ниже предложения. Таким путем он быстро и полностью овладеет основными свойствами инцидентности в проективном пространстве.

3. Точка и прямая, не содержащая эту точку, определяют одну и только одну плоскость, на которой они обе лежат.

3'. Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, определяют одну и только одну точку, через которую они обе проходят.

4. Две различные прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются в одной и только одной точке.

4'. Две различные прямые, имеющие общую точку, определяют одну и только одну плоскость.

Читатель, быть может, заметил уже, что каждая пара предложений 1 и 1', 2 и 2' и т. д. обладает тем свойством, что одно из них может быть получено из другого путем замены друг другом слов „точка“ и „плоскость“, причем слово „прямая“ должно остаться без изменения. Как мы уже указали выше, при формулировке предложений на плоскости (где мы имели двойственность между точками и прямыми), это изменение могло бы быть сведено просто к механической перестановке слов „точка“ и „плоскость“, если бы этому не препятствовало несовершенство нашего языка. Однако терминология, принятая нами для плоскости, может быть распространена и на пространственные соотношения. Мы будем, таким образом, говорить, что точка инцидентна с плоскостью; это отношение между точкой и плоскостью может быть с равным успехом выражено словами *плоскость инцидентна с точкой* вместо привычной старой формулировки, гласившей, что плоскость проходит через точку или содержит ее. Если прямая инцидентна с плоскостью, то мы можем также сказать, что плоскость инцидентна с прямой и т. д.

Если мы теперь сформулируем предложения 1 и 1', 2 и 2' и т. д., пользуясь этой терминологией, то увидим, что любое из предложений каждой пары переходит в соответствующее ему путем простой замены друг другом слов „точка“ и „плоскость“, причем слово „прямая“ не заменяется другим. Например, предложение 4 в этой терминологии гласит: *две различные прямые, инцидентные с одной и той же плоскостью, инцидентны с одной и только одной общей их точкой*. Заменяя в этом предложении слово „точка“ словом „плоскость“, и обратно, мы получим: *две различные прямые, инцидентные с одной и той же точкой, инцидентны с одной и только одной общей плоскостью*. Это, очевидно, не что иное, как предложение 4'. Читателю следует сформулировать в этих терминах каждое из предложений 1, 2, 3 и проверить тот факт, что при простой замене друг другом слов „точка“ и „плоскость“ они переходят в двойственные им предложения 1', 2', 3'.

**8. Принцип двойственности.** Пары предложений 1 и 1', 2 и 2' и т. д. представляют собой примеры так называемых *двойственных предложений*; каждое из них является *двой-*

*ственным* по отношению к другому (в пространстве). Общий принцип, отдельными примерами которого они являются, называется принципом двойственности в пространстве. Он может быть сформулирован следующим образом.

*Принцип двойственности в пространстве. Из каждого проективного предложения относительно точек, прямых и плоскостей в пространстве, выраженного в терминах инцидентности, может быть получено второе предложение путем простой замены слова „точка“ словом „плоскость“, и обратно.*

Принцип двойственности принадлежит к числу наиболее важных и изящных положений во всей современной геометрии. Значение его заключается в том, что, установив справедливость одного из двух двойственных предложений, мы можем с уверенностью принять второе без отдельного доказательства, предполагая, конечно, что сам по себе принцип двойственности нами доказан. Он выражает в наиболее сжатой форме симметрию структуры проективной геометрии, которая является одной из самых замечательных ее особенностей. В явном виде он был выражен только в начале девятнадцатого столетия. Впервые он был сформулирован Жергонном (Gergonne) в 1826 г.; но он был уже подготовлен работами Понселе и др. в первой четверти века. Он представляет собой, таким образом, вполне современное предложение. Далеко идущие следствия этого плодотворного положения не могут не произвести глубокого впечатления на читателя.

Доказательство принципа двойственности может быть дано различными путями. Можно построить полную систему аксиом проективной геометрии таким образом, чтобы они были расположены в виде пар двойственных предложений. Для каждой теоремы, формально вытекающей из такой системы постулатов, может быть доказана двойственная ей теорема путем дублирования шаг за шагом доказательства первой теоремы. Нам не представляется, однако, целесообразным в столь кратком и элементарном изложении, как наше, уделить место такой аксиоматической трактовке. Читатель, интересующийся этим методом доказательства, может обратиться к книге Веблена и Юнга, *Проективная геометрия*, т. I, гл. I\*.

\* Veblen, and Young, *Projective Geometry*, Vol. I, Chapter I, Бостон—Нью-Йорк, 1910. Читатель найдет аксиоматическое обо-

Принцип двойственности может быть также легко доказан аналитическим путем, коль скоро будет построен соответствующий аналитический аппарат проективной геометрии (см. п. 51 настоящего сочинения). Наконец, принцип двойственности непосредственно вытекает из группы теорем, содержащих основные соотношения полюсов и поляр конического сечения (стр. 81), как это будет показано ниже. Поэтому мы предлагаем читателю принять пока принцип двойственности на веру. Мы намерены в дальнейшем свободно пользоваться принципом двойственности, помня о том, что мы в состоянии в каждом отдельном случае, если пожелаем, доказать двойственную теорему, дублируя доказательство исходной теоремы.

Естественным следствием принципа двойственности в пространстве является соответствующий ему принцип двойственности на плоскости.

Принцип двойственности на плоскости. *Из каждого проективного предложения относительно точек и прямых на плоскости, выраженного в терминах инцидентности, может быть получено второе предложение путем замены слова „точка“ словом „прямая“, и обратно.*

Этот принцип может быть выведен из принципа двойственности в пространстве следующим образом. Пусть мы имеем на плоскости некоторую фигуру  $F$ , состоящую из точек и прямых, и пусть точка  $O$  не лежит в этой плоскости. Проектируя фигуру  $F$  из точки  $O$ , мы получим некоторую совокупность  $F'$  прямых и плоскостей, проходящих через точку  $O$ , такую, что если некоторая точка фигуры  $F$  лежит на прямой, принадлежащей той же фигуре, то соответствующая этой точке прямая совокупности  $F'$  будет лежать в плоскости, соответствующей первоначальной прямой. Пространственный образ  $F''$ , двойственный совокупности  $F'$ , должен состоять из совокупности прямых и точек на плоскости (так как фраза, напечатанная курсивом, и фраза „совокупность прямых и плоскостей, проходящих через одну точку“, двойственны друг другу). Принцип двойственности на плоскости следует теперь непосредственно из рассмотрения соотношения между двумя

---

снование принципа двойственности в русском сочинении: Н. Г л а г о л е в, Проективная геометрия, ОНТИ, М. — Л., 1936. (Прим. ред.)

плоскими фигурами  $F$  и  $F''$ . В самом деле, каждой точке  $P$  фигуры  $F$  соответствует прямая  $OP$  совокупности  $F'$ ; а этой прямой — некоторая прямая фигуры  $F''$ ; каждой прямой  $l$  фигуры  $F$  соответствует плоскость совокупности  $F'$ , проходящая через эту прямую и точку  $O$ , а этой плоскости, в свою очередь, соответствует некоторая точка фигуры  $F''$ . Более того, если точка  $P$  лежит на прямой  $l$ , то прямая фигуры  $F''$ , соответствующая точке  $P$ , проходит через точку, соответствующую прямой  $l$ . Каждому проективному свойству фигуры  $F$  будет поэтому соответствовать проективное свойство фигуры  $F''$ , получающееся из первого путем замены слова „точка“ словом „прямая“, и обратно\*.

**9. Элементарные фигуры.** Теперь мы подготовлены к тому, чтобы приступить к более систематическому изучению проективных свойств фигур. В интересах простоты мы ограничимся, главным образом, фигурами на плоскости, хотя в отдельных случаях, когда это будет целесообразно, мы будем пользоваться пространственными фигурами, как, например, при доказательстве теоремы Дезарга в начале следующей главы. Мы закончим настоящую главу определением некоторых простейших фигур проективной геометрии. Как и следует ожидать, они предстанут перед нами в виде пар двойственных друг другу фигур.

Если три или более точек расположены на одной прямой, то они называются *коллинеарными*.

Если три или более прямых проходят через одну и ту же точку, то они называются *сходящимися*.

Фигура, состоящая из трех неколлинеарных точек и трех прямых, попарно их соединяющих, называется *треугольником*. Три точки носят название *вершин*, а три прямые — *сторон* треугольника.

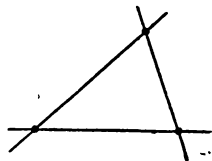
Треугольник есть фигура, самой себе двойственная на плоскости. В самом деле, двойственная треугольнику фигура определяется следующим образом: „Фигура, состоящая из

---

\* Принцип двойственности в проективном пространстве в русской литературе иногда называют „большим принципом двойственности“, в отличие от малого принципа двойственности, относящегося к проективной плоскости. (*Прим. ред.*)



трех несходящихся прямых и трех точек попарного их пересечения, называется треугольником<sup>а</sup>. Необходимо заметить, что понятие треугольника в проективной геометрии отличается от соответствующего определения в метрической геометрии, так как в последней стороны треугольника являются только отрезками прямых, соединяющих его вершины, в то время как в проективной геометрии речь идет о прямых целиком (фиг. 7).



Треугольник  
Фиг. 7

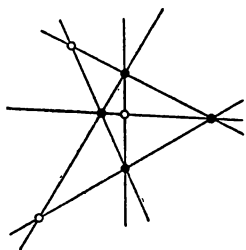
Фигура, состоящая из четырех точек на плоскости, никакие три из которых не коллинеарны, и шести прямых, попарно их соединяющих, называется *полным четырехугольником*. Четыре точки (отмеченные на фиг. 8 значком  $\bullet$ ) называются *вершинами*, а шесть прямых — *сторонами* четырехугольника. Стороны, не имеющие общей вершины, называются *противоположными*. Точки пересечения трех пар противоположных сторон (отмеченные на фиг. 8 слева значком  $\circ$ ), называются *диагональными точками*.

Если между точками двух фигур, расположенных в одной плоскости, существует соответствие такого рода, что прямые, соединяющие каждую пару соответственных точек, сходятся в некоторой точке  $O$ , то фигуры называются *перспективными* относительно *центра*  $O$ .

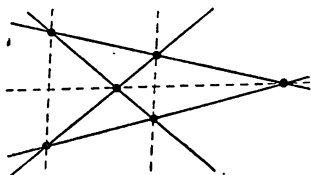
Фигура, состоящая из четырех прямых на плоскости, никакие три из которых не сходятся в одной точке, и шести точек попарного их пересечения, называется *полным четырехсторонником*. Четыре прямые называются *сторонами*, а шесть точек — *вершинами* четырехсторонника. Вершины, не примыкающие к одной и той же стороне, называются *противоположными*. Прямые, соединяющие три пары противоположных вершин, называются *диагональными прямыми* или *диагоналями* (отмечены пунктиром на фиг. 8 справа).

Если между прямыми линиями двух фигур существует соответствие такого рода, что точки пересечения каждой пары соответственных прямых лежат на одной и той же прямой  $l$ , то эти фигуры называются *перспективными* относительно *оси*  $l$ .

С понятием *перспективного соответствия относительно центра* в том виде, как мы его здесь определили, мы уже знакомы. Идея о *перспективном соответствии относительно оси*, определение которой дано в правом столбце, является, наоборот, новой. Это служит хорошим примером того, что понятия проективной геометрии появ-



Полный четырехугольник

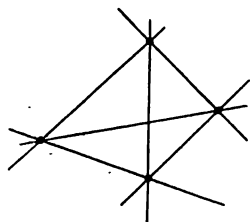


Полный четырехсторонник

Фиг. 8

ляются всегда в виде двойственных пар. Дадим теперь первое определение фигуры трех измерений.

Фигура, состоящая из четырех точек, не расположенных в одной плоскости, вместе с четырьмя плоскостями, проходящими через каждые три точки, и шестью прямыми, попарно эти точки соединяющими, называется *тетраэдром*. Четыре точки, шесть прямых и четыре плоскости называются соответственно *вершинами*, *ребрами* и *гранями* тетраэдра.

Тетраэдр  
Фиг. 9

Тетраэдр есть фигура, самой себе двойственная в пространстве. Мы предлагаем читателю построить определенную фигуру в пространстве, двойственную данному выше, и самому убедиться в

справедливости этого утверждения. Читателю следует пользоваться каждым подходящим случаем для построения двойственных образов и теорем, для того чтобы вполне овладеть этим процессом. Если он последует этому совету, то в очень скором времени сдвигание проективных предложений не будет представлять для него никакого труда; только на первых порах это может потребовать несколько усиленного внимания и тщательного анализа.

Дадим теперь определение пространственной фигуры, которая нам понадобится в начале следующей главы.

Фигура, состоящая из пяти точек, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости, вместе с десятью прямыми, соединяющими каждую пару ее точек, и десятью плоскостями, проходящими через каждые три ее точки, называется *полным пятивершинником в пространстве*.

Читатель должен уяснить себе общий принцип, которым мы руководствовались при формулировке всех установленных выше определений. В последнем случае фигура состояла из пяти точек, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости, и всех прямых и плоскостей, проходящих через эти точки. Так как каждая пара различных точек определяет одну прямую, а число сочетаний из пяти по два равно  $5 \cdot \frac{4}{2} = 10$ , то число таких прямых равно десяти; так как, далее, каждые три неколлинеарные точки (а в нашей фигуре никакие три точки не могут быть коллинеарными, так как никакие четыре из них не лежат в одной плоскости) определяют одну плоскость, то число плоскостей должно быть равно числу сочетаний из пяти по три,  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3}$ , т. е. опять-таки десяти. Этот принцип отражен в термине „полный“ в определении полного пятивершинника. Точно так же тетраэдр есть полный четырехвершинник в пространстве, треугольник есть полный трехвершинник на плоскости, полный четырехугольник есть полный четырехвершинник на плоскости, полный четырехсторонник также обладает этим же свойством полноты на плоскости и т. д. Отсюда ясно, что мы разумеем под названием полный  $n$ -вершинник на плоскости или в пространстве и т. д.

С другой стороны, *простой четырехугольник* состоит из четырех точек  $A, B, C, D$  (из которых никакие три не коллинеарны), заданных в определенном циклическом порядке  $ABCD$ , и четырех прямых, соединяющих последовательно пары этих точек ( $AB, BC, CD$  и  $DA$ ).

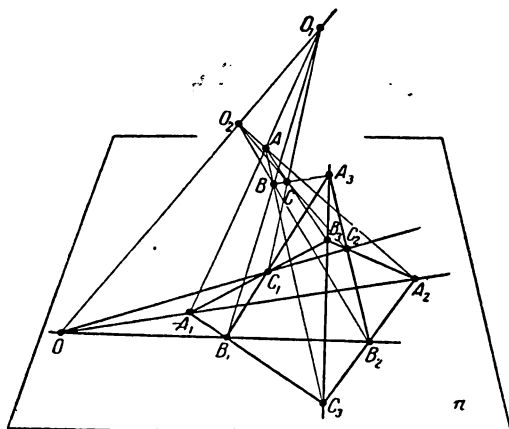
Полный пятивершинник в пространстве не двойственен самому себе. Образом, двойственным ему в пространстве, является так называемый *полный пятигранник*, состоящий из пяти плоскостей, десяти прямых и десяти точек. В этой книге мы не будем, однако, иметь случая пользоваться этой фигурой.

### Г Л А В А    III

## ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЧЕТВЕРКИ

**10. Конфигурация Дезарга.** Приступая теперь к непосредственному изучению проективной геометрии, мы начнем с рассмотрения сечения полного пространственного пятивершинника плоскостью, не проходящей ни через одну из его вершин. Так как пятивершинник состоит, кроме своих пяти вершин, еще из десяти прямых и десяти плоскостей, то рассматриваемое сечение будет представлять собой плоскую фигуру, состоящую из десяти точек и десяти прямых. Для того чтобы легче составить себе ясное представление о взаимном расположении этих точек и прямых, мы будем рассматривать наш пятивершинник как составленный из треугольника  $ABC$  и двух других точек  $O_1, O_2$  вместе со всеми прямыми и плоскостями, соединяющими эти точки попарно и по три. Проектируя треугольник  $ABC$  из точки  $O_1$  на плоскость сечения  $\pi$ , мы получим треугольник  $A_1B_1C_1$ , проектируя его же из точки  $O_2$  — треугольник  $A_2B_2C_2$ . Прямая  $O_1O_2$  пересекает плоскость  $\pi$  в точке  $O$ , а плоскости  $O_1O_2A, O_1O_2B, O_1O_2C$  пересекают эту плоскость по трем прямым, проходящим через точку  $O$  и содержащим соответственно пары точек  $A_1A_2, B_1B_2$  и  $C_1C_2$ . Частями фигуры, получающейся в сечении нашего пятивершинника плоскостью  $\pi$ , являются два треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ , обладающих тем свойством, что прямые  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$ , соединяющие соответственные их вершины, сходятся в одной точке  $O$ . Это дает нам семь из десяти точек и девять из десяти прямых сечения нашего пятивершинника плоскостью. Недостающая прямая есть, очевидно, линия пересечения плоскости треугольника  $ABC$  с плоскостью  $\pi$ , а три недостающие точки суть точки  $A_3, B_3, C_3$ , в которых прямые  $BC, CA$  и  $AB$ , соответственно, пересекают плоскость  $\pi$ . Эти три точки, очевидно, лежат на

линии пересечения плоскостей  $ABC$  и  $\pi$ . С другой стороны,  $A_8$  есть точка пересечения прямых  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$ , так как эти прямые лежат соответственно в плоскостях  $O_1BC$  и  $O_2BC$ . Поэтому мы можем определить сечение полного пространственного пятивершинника плоскостью как фигуру, состоящую



Ф и г. 10

из двух треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ , перспективных относительно точки  $O$  и обладающих тем свойством, что пары их соответственных сторон пересекаются в трех коллинеарных точках  $A_8, B_8, C_8$ .

Эта фигура известна под названием *конфигурации Дезарга*. Вообще, *плоской конфигурацией* называется фигура, состоящая из  $a_{11}$  точек и  $a_{22}$  прямых и обладающая тем свойством, что через каждую ее точку проходит одно и то же число  $a_{12}$  прямых и на каждой ее прямой лежит одно и то же число  $a_{21}$  ее точек. Такая конфигурация обозначается символом  $\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ a_{12}, & a_{22} \end{pmatrix}$ . Заметим, что конфигурации Дезарга соответствует символ  $\begin{pmatrix} 10, & 3 \\ 3, & 10 \end{pmatrix}$ , так как она состоит из десяти точек и десяти прямых, причем через каждую ее точку проходят три прямые и на каждой прямой лежат три ее точки. треугольник представляет собой конфигурацию, которой

соответствует символ  $\begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 2, & 3 \end{pmatrix}$ , четырехугольник есть конфигурация, символ которой  $\begin{pmatrix} 4, & 2 \\ 3, & 6 \end{pmatrix}$  и т. д. В отдельных случаях мы будем встречаться и с другими конфигурациями, но систематическое их изучение выходит из рамок этого краткого сочинения\*.

Данное нами определение конфигурации Дезарга было несимметричным, так как мы отвели в нем особую роль одной из ее точек, а именно, точке  $O$ , или, что то же, одной из прямых  $O_1O_2$  нашего пятивершинника. Мы могли бы, однако, с одинаковым успехом в качестве такой прямой выбрать любую из девяти других прямых пятивершинника. Конфигурация Дезарга обладает полной симметрией по отношению к своим точкам и прямым. Она может быть построена десятью различными способами, так как состоит из двух треугольников, перспективных относительно точки, причем за эту точку можно принять каждую из десяти точек конфигурации. Читателю следует выбрать несколько точек фигуры в качестве центров перспективы, отыскать соответствующую пару перспективных треугольников и убедиться в каждом случае, что пары их соответственных сторон пересекаются в трех точках, лежащих на одной из прямых линий фигуры.

Мы можем теперь дать доказательство теоремы Дезарга, условие которой приведено с целью иллюстрации в гл. I (стр. 15). Мы дадим ей следующую краткую формулировку, основанную на введенном нами в предыдущей главе определении фигур, перспективных относительно прямой.

*Теорема Дезарга. Если два треугольника перспективны относительно точки, то они перспективны также относительно прямой, и обратно.*

После того что было сказано о конфигурации Дезарга, для доказательства теоремы необходимо только показать, что два треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ , перспективные относительно точки  $O$ , могут рассматриваться как часть плоского

---

\* Читатель, заинтересованный свойствами плоских конфигураций, может обратиться к гл. III "Конфигурации" в книге Гильберта и Кон-Фоссена, Наглядная геометрия, ОНТИ, М.—Л., 1936 г., где содержится более подробное, хотя и совсем элементарное изложение вопроса. (Прим. ред.)

сечения полного пространственного пятивершинника. Мы будем считать, что оба треугольника лежат в одной плоскости, так как для случая, когда они лежат в разных плоскостях, теорема непосредственно очевидна (стр. 15). Пусть  $O_1, O_2$  — две различные точки, коллинеарные с точкой  $O$  и не лежащие в плоскости обоих треугольников. Так как, по условию, прямая  $A_1A_2$  проходит через точку  $O$ , то точки  $O_1, O_2, A_1, A_2$  лежат все в одной плоскости. Прямые  $O_1A_1$  и  $O_2A_2$  должны поэтому пересечься в некоторой точке  $A$ . Точно так же прямые  $O_1B_1$  и  $O_2B_2$  пересекутся в некоторой точке  $B$  и прямые  $O_1C_1$  и  $O_2C_2$  — в точке  $C$ . Точки  $O_1, O_2, A, B, C$  суть вершины полного пятивершинника; рассматриваемые нами перспективные треугольники являются частью его плоского сечения. Они являются, таким образом, частью конфигурации Дезарга, и, следовательно, пары их соответственных сторон должны пересекаться в коллинеарных точках, а это означает, что они перспективны относительно прямой.

Обратная теорема — если два треугольника перспективны относительно прямой, то они перспективны и относительно точки, — в случае, если треугольники расположены в одной плоскости, представляет собой предложение, двойственное на плоскости прямой теореме и поэтому не требует отдельного доказательства, поскольку был принят принцип двойственности. Для читателя, не представит труда доказать эту обратную теорему, следуя тому же пути, по которому ведется доказательство прямой теоремы\*.

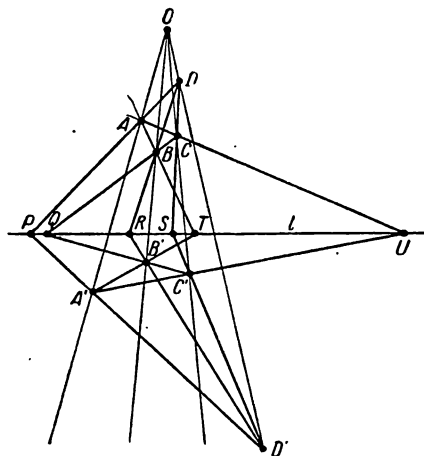
---

\* Теорема Дезарга для двух компланарных (расположенных в одной плоскости) треугольников, таким образом, доказывается стереометрическими средствами, фактически — введением третьего треугольника, который не компланарен ни с одним из данных треугольников.

Между тем, в том случае, когда данные треугольники компланарны, теорема Дезарга представляет собой чисто планиметрическое предложение, и совершенно естественно искать планиметрическое его доказательство. Было затрачено немало усилий, чтобы такое доказательство разыскать. Однако Гильберту удалось обнаружить, что дать такое доказательство строго проективными средствами (не пользуясь понятием равенства отрезков) невозможно (см. Д. Гильберт, Основания геометрии, гл. V, ГГТИ, 1948). Он показал, что возможна так называемая „недезаргова геометрия“, т. е. геометрия, в которой выполнены все проективные аксиомы, но теорема Дезарга не имеет места. (*Прим. ред.*)

**11. Основная теорема о ряде точек, порождаемом полным четырехугольником.** В качестве одного из приложений теоремы Дезарга мы докажем сейчас следующую важную теорему:

*Если два полных четырехугольника  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  расположены относительно друг друга таким образом, что точки пересечения пяти пар соответственных сторон —  $AB$  и  $A'B'$ ,  $BC$  и  $B'C'$  и т. д. — лежат на одной прямой  $l$ , то и точка пересечения шестой пары соответственных сторон лежит на той же прямой  $l$ .*



Фиг. 11

Пусть  $P, Q, R, S, T$  — пять точек, в которых, по условию, пять пар соответственных сторон пересекают прямую  $l$ . Так как три пары соответственных сторон треугольников  $BCD$  и  $B'C'D'$  пересекаются в точках  $Q, R, S$ , лежащих на прямой  $l$ , то эти треугольники перспективны относительно точки (теорема Дезарга). Точно так же перспективны относительно

точки и треугольники  $ABD$  и  $A'B'D'$ . Более того, центр перспективы должен быть одним и тем же для обеих пар треугольников, так как он является точкой пересечения прямых  $BB'$  и  $DD'$ . Оба четырехугольника поэтому перспективны относительно центра  $O$ ; в частности, относительно центра  $O$  перспективны и треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$ . Следовательно, пары их соответственных сторон должны пересекаться в коллинеарных точках  $Q, T, U$ . И поскольку точки  $Q$  и  $T$  лежат на прямой  $l$ , на той же прямой должна лежать и точка  $U$ .

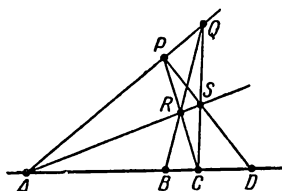
Ряд из шести (или пяти, или четырех) точек, в которых стороны полного четырехугольника пересекают некоторую прямую линию, называется *рядом точек, порождаемым пол-*



ным четырехугольником. Количество точек такого ряда может сводиться к пяти или четырем, если прямая проходит через одну или через две из диагональных точек четырехугольника.

Ряд точек, порождаемый четырехугольником, не может, однако, состоять менее чем из четырех точек, так как *три диагональные точки четырехугольника никогда не лежат на одной прямой*.

**12. Гармонические четверки.** Особо важное значение имеет тот случай, когда прямая  $l$  проходит через две диагональные точки четырехугольника (стр. 33). Если  $A$  и  $C$  суть две диагональные точки четырехугольника  $PQRS$  и  $B$  и  $D$  — точки, в которых две остальные стороны четырехугольника пересекают прямую  $AC$ , то две пары точек  $AC$ ,  $BD$  называют *гармонической четверкой* точек и обозначают символом  $H(AC, BD)$ . Точнее, точки  $B, D$  называются *гармоническими* по отношению к точкам  $A$  и  $C$ ; иначе, точка  $D$  (или  $B$ ) называется *гармонически сопряженной* с точкой  $B$  (или  $D$ ) относительно пары точек  $A$  и  $C$ ; это обозначается символом  $D = H(AC, B)$  и  $B = H(AC, D)$ \*. Согласно предыдущей теореме, точка  $D$  определяется однозначно, если заданы точки  $A, C$  и  $B$ . Имеет место следующая теорема:



Ф и г. 12

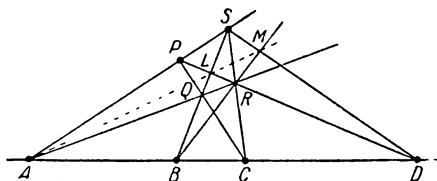
*Точка, гармонически сопряженная с данной точкой относительно двух других точек, определяется однозначно\*\*.*

\* Часто говорят также, что точки  $D$  и  $B$  делят гармонически пару точек  $A, C$ ; мы будем часто пользоваться этой терминологией. (Прим. ред.)

\*\* Это — очень важное предложение, на котором строится вся проективная геометрия. Ниже мы приводим то же доказательство в иной форме, которая, быть может, покажется читателю более ясной. К тому же рассуждения, приводимые в тексте, требуют еще рассмотрения некоторых частных случаев, которые читателю следует разобрать самому. Пусть  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  — два полных четырехугольника с общими диагональными точками  $P$  и  $Q$ . Если стороны  $BC$  и  $B'C'$  этих четырехугольников пересекаются в точке  $S$  прямой  $PQ$ , то и стороны их  $AD$  и  $A'D'$  пересекаются

Далее, если точки  $B, D$  делят гармонически пару точек  $A$  и  $C$ , то и точки  $A, C$  делят гармонически пару точек  $B$  и  $D$ . Пусть на фиг. 13 гармоническая четверка  $H(AC, BD)$  определяется четырехугольником  $PQRS$  с диагональными точками  $A$  и  $C$ . Мы покажем, что точки  $B$  и  $D$  будут тогда диагональными точками полного четырехугольника, остальные две стороны которого проходят через точки  $A$  и  $C$ .

С этой целью проведем прямые  $BR$  и  $DS$ ; пусть они пересекутся в точке  $M$ ; обозначим через  $L$  точку пересечения



Фиг. 13

прямых  $PR$  и  $QS$ . Тогда треугольники  $PLQ$  и  $SMR$  будут перспективными относительно прямой  $BD$ . Прямая  $LM$  проходит, следовательно, через точку  $A$  (стр. 39). Четырехугольник  $SLMR$  удов-

летворяет поэтому требуемым условиям; в самом деле,  $B$  и  $D$  являются его диагональными точками, а точки  $A$  и  $C$  лежат на двух остальных его сторонах.

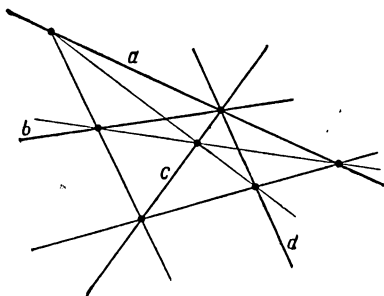
Это показывает, что гармоническое расположение двух пар точек  $A, C$  и  $B, D$  является взаимным; иными словами, *из соотношения  $H(AC, BD)$  следуют соотношения  $H(AC, DB)$ ,  $H(CA, BD)$ ,  $H(CA, DB)$ ,  $H(BD, AC)$ ,  $H(BD, CA)$ ,  $H(DB, AC)$  и  $H(DB, CA)$ \**.

в точке  $T$  на той же прямой. Иначе говоря, построение точки  $T$ , которая служит четвертой гармонической к точкам  $P, Q$  и  $S$  (т. е. точки  $T$  и  $S$  гармонически сопряжены относительно точек  $P$  и  $Q$ ), не зависит от того, каким полным четырехугольником мы пользуемся для ее построения.

Треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  перспективны относительно оси  $u$ . Значит, прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  сходятся в одной точке ( $O$ ). Треугольники  $BCD$  и  $B'C'D'$  перспективны относительно той же оси. Значит, прямые  $BB'$ ,  $CC'$  и  $DD'$  пересекаются в одной точке ( $O'$ ). Так как  $BB'$  и  $CC'$ , общие для обоих треугольников, могут пересекаться только в одной точке, то точка  $O$  совпадает с  $O'$ . Рекомендуем читателю сделать самому чертеж, относящийся к приведенным здесь рассуждениям. (Прим. ред.)

\* То, что две точки каждой пары могут заменять одна другую, следует непосредственно из определения гармонического соответствия двух пар. (Прим. ред.)

Образ, двойственный гармонической четверке точек на плоскости, называется *гармонической четверкой прямых*. Она состоит, очевидно, из двух пар компланарных прямых  $a$ ,  $c$  и  $b$ ,  $d$ , проходящих через одну и ту же точку, причем прямые  $a$  и  $c$  представляют собой диагональные линии полного четырехсторонника, а прямые  $b$  и  $d$  соединяют остальные вершины четырехсторонника с точкой пересечения прямых  $a$  и  $c$ . В силу принципа двойственности, только что доказанные нами теоремы относительно гармонической четверки точек в равной мере применимы и к гармонической четверке прямых.



Ф и г. 14

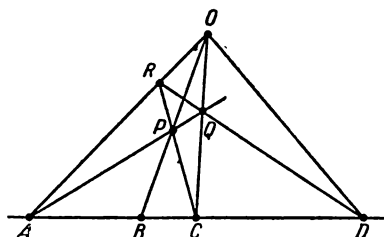
Таким образом, *если  $a$  и  $c$  есть пара прямых, гармонических относительно прямых  $b$  и  $d$  (т. е. если пара прямых  $a$  и  $c$  делит гармонически пару  $b$  и  $d$ ), то и пара прямых  $b$  и  $d$  является гармонической относительно  $a$  и  $c$  (делит гармонически пару  $a$  и  $c$ ); прямая, гармонически сопряженная с прямой  $b$  относительно двух других прямых  $a$  и  $c$ , определяется однозначно (прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$  суть, конечно, компланарные и сходящиеся) и т. д.*

Большое значение гармонической четверки точек или прямых заключается в том, что такая четверка при любом проективном преобразовании снова переходит в гармоническую же четверку. Мы говорили в гл. I, что проективная геометрия занимается такими свойствами фигур, которые остаются неизменными при проективных преобразованиях. До сего времени из таких свойств мы встречались только с инцидентностью точек и прямых. Теперь мы можем присоединить к этому свойство гармонического соотношения.

То, что это свойство сохраняется при проективном преобразовании, вытекает непосредственно из следующей теоремы:

*Прямые, проектирующие из какой-нибудь точки гармоническую четверку точек, сами составляют гармоническую четверку прямых.*

Пусть  $A, C$  и  $B, D$  составляют гармоническую четверку точек  $H(AC, BD)$ , а точка  $O$  не лежит на прямой  $AD$ . Мы хотим доказать, что прямые  $OA, OC$  и  $OB, OD$  образуют гармоническую четверку прямых. Для этой цели проведем через точку  $A$  прямую, пересекающую прямые  $OB, OC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно; проведем также прямую  $CP$ ; пусть она пересечет прямую  $OA$  в точке  $R$ .



Фиг. 15

Четырехугольник  $ORPQ$  имеет точки  $A$  и  $C$  своими диагональными точками, и одна из его сторон проходит через точку  $B$ . Так как пары точек  $A, C$  и  $B, D$  образуют гармоническую четверку, то шестая сторона  $RQ$  четырехугольника  $ORPQ$  проходит через точку  $D$ . С другой стороны, прямые  $AD, AQ, RD, RC$  образуют четырехсторонник, причем прямые  $OA$  и  $OC$  являются его диагоналями, а прямые  $OB$  и  $OD$  проходят через две остальные вершины. Прямые, проходящие через точку  $O$ , образуют поэтому, согласно определению, гармоническую четверку. Таким образом, теорема доказана.

Теорема, двойственная на плоскости только что доказанной, гласит: *сечение гармонической четверки прямых прямой линией образует гармоническую четверку точек*. Отсюда непосредственно следует, что любая последовательность операций проектирования и сечения гармонической четверки на плоскости преобразует ее снова в гармоническую четверку. Отсюда мы имеем теорему:

*Четверка прямых или точек на плоскости, проективная относительно какой-либо гармонической четверки, сама является гармонической четверкой.*

## ПРОЕКТИВНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ В ФОРМАХ ПЕРВОЙ СТУПЕНИ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

**13. Основные формы (образы) первой ступени на плоскости.** Прежде чем приступить к более обстоятельному изучению проективных преобразований, нам необходимо будет ввести следующие определения, относящиеся к плоским фигурам.

Совокупность всех точек, расположенных на одной прямой, называется *прямолинейным рядом точек*.

Совокупность всех прямых, проходящих через одну точку, называется *пучком прямых*.

Следует помнить, что все прямые, принадлежащие одному пучку прямых, лежат в одной плоскости. Совокупность всех прямых в пространстве, проходящих через одну и ту же точку, называется *связкой прямых*.

Прямолинейный ряд точек и пучок прямых носят название *основных форм* (или образов) *первой ступени на плоскости*. Существует еще основная форма первой ступени в пространстве; это так называемый *пучок плоскостей*, представляющий собой совокупность всех плоскостей, проходящих через одну прямую. Мы намерены теперь более детально изучить проективные преобразования или проективные соответствия между формами первой ступени на плоскости. Напомним сначала некоторые определения.

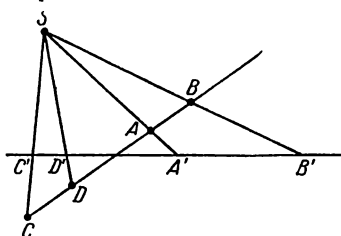
Соответствие между точками двух прямолинейных рядов точек называется *перспективным*, если прямые, соединяющие пары соответственных точек, сходятся в

Соответствие между прямыми двух пучков прямых называется *перспективным*, если точки пересечения пар соответственных прямых коллинеарны, т. е. если они об-

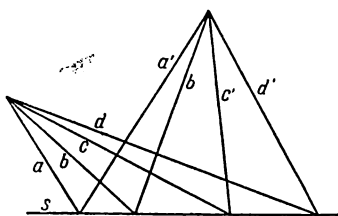
одной точке, т. е. если эти прямые образуют пучок прямых.

разуют прямолинейный ряд точек.

¶ Следует заметить, что эти определения эквивалентны тем, которые были даны нами выше (стр. 33); лишь терминология в них несколько другая. Нам необходимо еще дать следующее определение.



Фиг. 16



Фиг. 17

Соответствие между пучком прямых и прямолинейным рядом точек называется *перспективным*, если каждая прямая пучка проходит через соответствующую точку этого ряда точек.

Перспективное соответствие или, короче, *перспективу*, мы будем обозначать символом  $\overset{s}{\wedge}$ . Именно, обозначение

$$ABCD \dots \overset{s}{\wedge} A'B'C'D' \dots$$

выражает, что прямолинейный ряд точек  $A, B, C, D, \dots$  перспективен прямолинейному ряду точек  $A', B', C', D', \dots$  таким образом, что точка  $A$  соответствует точке  $A'$ , точка  $B$  — точке  $B'$ , точка  $C$  — точке  $C'$  и т. д., и что все прямые  $AA', BB', CC'$  и т. д. проходят через точку  $S$ . Точка  $S$  называется *центром* перспективы, а само перспективное соответствие — *центральной* (фиг. 16). Аналогично этому обозначение

$$abcd \dots \overset{s}{\wedge} a'b'c'd' \dots$$

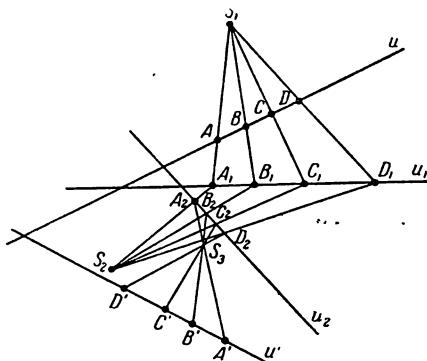
выражает, что пучок прямых  $a, b, c, d, \dots$  перспективен пучку  $a', b', c', d', \dots$  таким образом, что прямая  $a$  соответствует прямой  $a'$ , прямая  $b$  — прямой  $b'$ , прямая  $c$  — прямой  $c'$  и т. д., и что все точки  $aa', bb', cc'$  и т. д. лежат на прямой  $s$ . Пря-

мая  $s$  называется *осью* перспективы, а само перспективное соответствие — *осевым*.

Соответствие между элементами (точками или прямыми) двух форм первой ступени называется *проективным*, если оно представляет собой результат конечного числа последовательно произведенных перспективных преобразований.

Так, например, на фиг. 18 точки прямой  $u$  перспективны точкам прямой  $u_1$  относительно центра перспективы  $S_1$ , точки прямой  $u_1$  перспективны точкам прямой  $u_2$  относительно центра  $S_2$ , точки прямой  $u_2$  перспективны точкам прямой  $u'$  относительно центра  $S_3$ . Посредством этой последовательности перспективных соответствий каждой точке прямой  $u$  ставится в соответствие однозначно определенная точка прямой  $u'$ , а именно, точке  $A$  — точка  $A'$ , точке  $B$  — точка  $B'$ , точке  $C$  — точка  $C'$  и т. д. Проективное соответствие будем обозначать символом  $\overline{\wedge}$ . Так, описанное выше соответствие будет обозначаться выражением

$$ABCD \dots \overline{\wedge} A'B'C'D' \dots$$

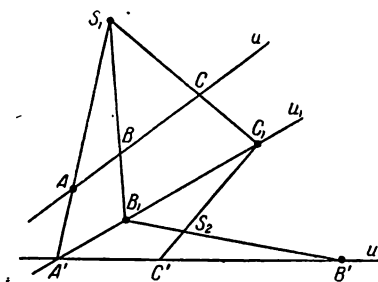


Фиг. 18

Необходимо отметить, что точка пересечения прямых  $u$  и  $u'$  в общем случае не будет соответствовать самой себе. В самом деле, мы вскоре увидим, что в том случае, когда в проективном соответствии эта точка соответствует самой себе, это соответствие будет перспективным.

В приведенном выше примере проективное соответствие было установлено с помощью трех последовательных перспективных преобразований; число этих последних несущественно, оно может быть каким угодно. Заметим, что перспективное соответствие является частным случаем проективного.

**14. Теоремы о проективном соответствии.** Данное нами определение проективного соответствия имеет очень общий характер. Мы намерены теперь доказать ряд теорем, который приведет нас к теореме, называемой основной теоремой проективной геометрии (стр. 51); при этом само понятие проективного соответствия, кажущееся на первый взгляд сложным, получит значительное упрощение.



Фиг. 19

Любые три точки, лежащие на одной прямой, могут быть приведены в проективное соответствие с любыми тремя точками другой прямой посредством двух перспективных преобразований.

Пусть  $A, B, C$  — три точки прямой  $u$ , и пусть  $A', B', C'$  — любые три точки другой прямой  $u'$ . Покажем, что с помощью последовательного проектирования из двух центров точка  $A$  может быть переведена в точку  $A'$ , точка  $B$  — в точку  $B'$ , точка  $C$  — в точку  $C'$ . В самом деле, если точка  $A$  совпадает с точкой  $A'$ , то для этого будет достаточно одного перспективного преобразования, так как в этом случае точка пересечения прямых  $BB'$  и  $CC'$  будет служить центром, из которого точки  $A, B, C$  проектируются соответственно в точки  $A', B', C'$ .

Пусть теперь точки  $A$  и  $A'$  различны (фиг. 19). Проведем прямую  $AA'$ , и пусть  $S_1$  — точка этой прямой, отличная от точек  $A$  и  $A'$ . Проведем еще через точку  $A'$  прямую  $u_1$ , отличную от  $u'$ ; тогда точки  $A, B, C$  будут проектироваться из центра  $S_1$  в точки  $A', B_1, C_1$  прямой  $u_1$ . Если теперь точка  $S_2$  есть пересечение прямых  $B_1B'$  и  $C_1C'$ , то мы будем иметь

$$ABC \xrightarrow[S_1]{\wedge} A'B_1C_1 \xrightarrow[S_2]{\wedge} A'B'C'.$$

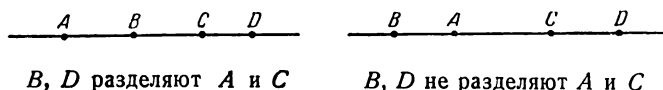
Отсюда

$$ABC \xrightarrow{\wedge} A'B'C',$$

что доказывает нашу теорему. Из этой теоремы непосредственно следует:



Любые три точки, лежащие на одной прямой, могут быть приведены в проективное соответствие с любыми другими тремя точками той же прямой; для осуществления этого соответствия требуется не более трех перспективных преобразований.



Фиг. 20

Любая гармоническая четверка точек может быть приведена в проективное соответствие с любой другой гармонической четверкой точек.

В самом деле, проективное преобразование, относящее точкам  $A, B, C$  гармонической четверки  $H(AC, BD)$  точки  $A', B', C'$  другой гармонической четверки  $H(A'C', B'D')$ , относит точке  $D$  точку  $D'$  (стр. 43).

Мы уже обращали внимание на тот факт, что две различные точки  $A$  и  $C$  делят (проективную) прямую на два отрезка (стр. 20). Если  $B$  есть точка, принадлежащая одному из этих отрезков, а  $D$  — точка, принадлежащая другому, то говорят, что точки  $B$  и  $D$  *разделяют* точки  $A$  и  $C$ . В этом случае при непрерывном движении по прямой от точки  $B$  к точке  $D$  мы должны пройти через одну из двух точек  $A$  или  $C$ . Если же, напротив, точки  $B$  и  $D$  расположены на одном и том же отрезке  $AC$ , то говорят, что точки  $B$  и  $D$  *не разделяют* точек  $A$  и  $C$ ; в этом случае всегда возможно непрерывным движением по прямой перейти от точки  $B$  к точке  $D$ , не проходя ни через одну из точек  $A$  и  $C$  (фиг. 20).

*Пары сопряженных точек гармонической четверки всегда разделяют одна другую\*.*

При построении гармонической четверки точек  $H(AC, BD)$  мы могли заметить, что пара точек  $A$  и  $C$  фактически раз-

---

\* Руководствуясь именно этим соображением, часто говорят, что точки  $B, D$  делят гармонически пару точек  $A, C$ , если точки  $A, C$  и  $B, D$  образуют гармоническую четверку. (Прим. ред.)

деляет пару точек  $B, D$ . Мы доказали также, что любая гармоническая четверка точек может быть приведена в проективное соответствие с некоторой построенной нами гармонической четверкой (стр. 49). Далее, проективное преобразование есть преобразование непрерывное, так как оно является результатом некоторой последовательности перспективных преобразований, которые сами по себе непрерывны (стр. 21). Поэтому и пары любой другой гармонической четверки должны разделять друг друга.

Для подготовки доказательства основной теоремы мы должны еще познакомиться с понятием точки, *гармонически связанной* с тремя заданными точками. Точка  $X$  прямой  $u$  называется *гармонически связанной* с тремя различными точками  $A, B, C$  той же прямой  $u$ , если она входит в состав последовательности точек  $A, B, C, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n = X$  такого рода, что  $P_1$  гармонически сопряжена с одной из точек  $A, B, C$  по отношению к двум другим, и любая последующая точка  $P_i$  гармонически сопряжена с одной из предшествующих точек последовательности по отношению к двум другим предшествующим точкам той же последовательности. Совокупность всех точек прямой, гармонически связанных с тремя заданными различными точками  $A, B, C$  той же прямой, называется *сетью рациональности, определяемой точками  $A, B, C$* . Важность для нашей цели введенного нами понятия сети рациональности происходит из того, что такого рода сеть является на прямой всюду плотной; иными словами, на любом отрезке прямой, определенном двумя различными точками  $M, N$  сети, существует точка этой же сети. Это вытекает непосредственно из того, что противоположное предположение, т. е. что на каком-либо из отрезков  $MN$  не имеется точек, принадлежащих сети, означало бы, что все точки сети расположены на другом отрезке. Но точка, гармонически сопряженная с какой-либо из этих точек по отношению к точкам  $M$  и  $N$ , должна лежать на первом отрезке, что, очевидно, противоречит сделанному допущению.

(Можно показать, что сеть рациональности эквивалентна совокупности точек прямой, координаты которой суть рациональные числа. Это служит основанием для ее названия и может помочь читателю уяснить сущность этого понятия.)

Мы можем теперь доказать лемму, из которой легко следует основная теорема.

*Проективное преобразование точек прямой, оставляющее неподвижными три ее точки, оставляет неподвижными все точки этой прямой.*

В самом деле, проективное преобразование, оставляющее неподвижными три различные точки  $A, B, C$ , очевидно, оставляет неподвижной каждую точку сети рациональности, определяемой этими тремя точками, т. е. оставляет неподвижной каждую точку совокупности, которая является всюду плотной на прямой. Такое преобразование, будучи непрерывным, должно поэтому оставлять неподвижной каждую точку прямой.

Основная теорема проективной геометрии. *Проективное соответствие между двумя образами первой ступени полностью определено, если заданы элементы, соответствующие трем различным элементам одного из них.*

Более точно и в применении к двум прямолинейным рядам точек теорема может быть сформулирована следующим образом:

*Если одна последовательность перспективных преобразований относит точкам  $A, B, C, D$  соответственно точки  $A', B', C', D'$ , а другая последовательность тем же точкам относит точки  $A', B', C', D_1'$ , то точка  $D_1'$  совпадает с точкой  $D'$ .*

Чтобы доказать это, заметим, что, осуществляя вторую последовательность перспективных преобразований в обратном порядке и вслед за ней первую их последовательность, мы получим проективное преобразование, оставляющее точки  $A', B', C'$  неподвижными и относящее точке  $D_1'$  точку  $D'$ , т. е., в принятых обозначениях,

$$A'B'C'D_1' \overline{\wedge} A'B'C'D'.$$

Но, согласно предыдущей лемме, такое преобразование должно оставлять и точку  $D_1'$  неподвижной. Таким образом,  $D' = D_1'$ . Отсюда получаем следующее важное следствие:

*Если при проективном соответствии между точками двух различных прямых точка их пересечения соответствует самой себе, то это соответствие является перспективным.*

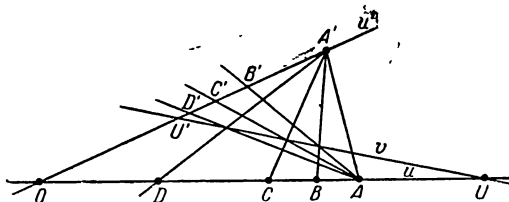
В самом деле, если  $A = A'$  есть точка пересечения обеих прямых, а проективное соответствие определено соотношением  $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$ , то перспективное соответствие, центром которого служит точка пересечения прямых  $BB'$  и  $CC'$ , удовлетворяет условию, определяющему данное соответствие.

Значение основной теоремы проективной геометрии становится ясным из следующих соображений. Проективное соответствие было определено как последовательность любого числа перспективных соответствий. Мы видели, однако, что проективное преобразование трех различных точек одной прямой в любые три различные точки другой прямой может быть выполнено с помощью двух перспективных преобразований. С другой стороны, основная теорема утверждает, что проективное соответствие полностью определяется заданием трех пар соответственных элементов. Отсюда следует, что соответствие, получаемое в результате любого числа перспективных преобразований, может быть получено при помощи двух таких преобразований, если речь идет о точках двух различных прямых, и не более чем трех перспективных преобразований, если соответствие устанавливается между точками одной и той же прямой. Проективное соответствие между точками двух различных прямых может быть поэтому установлено с помощью процесса, описанного на стр. 48.

Читателю не следует пренебрегать случаем проработать самостоятельно предложения и построения, которые на плоскости двойственны изложенным в настоящей главе. Так, например, построение, двойственное на плоскости тому, которое здесь только что выполнено, приводит к построению проективного соответствия между прямыми двух пучков прямых, когда заданы три пары соответственных прямых. Читатель легко может самостоятельно выполнить это построение.

**15. Ось гомологии.** Другой и часто очень удобный метод построения проективного соответствия между формами первой степени одного и того же рода вытекает из следующих соображений, которыми мы закончим рассмотрение случая двух прямолинейных рядов точек, расположенных на различных прямых.

Пусть  $u$  и  $u'$  — две прямые, лежащие в одной плоскости, и пусть проективное соответствие относит точкам  $A, B, C, D, \dots$  прямой  $u$  соответственно точки  $A', B', C', D', \dots$  прямой  $u'$  (фиг. 21). Если мы будем проектировать эти точки соответственно из  $A$  и  $A'$ , то получим два проективных пучка прямых  $AA', AB', AC', AD', \dots$  и  $A'A, A'B, A'C, A'D, \dots$ , при-



Фиг. 21

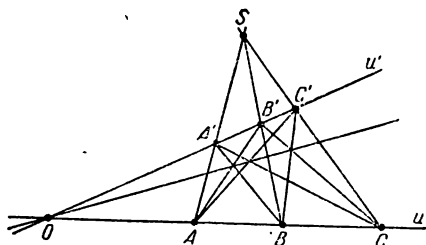
чем прямая  $AA'$  в этом преобразовании соответствует самой себе. Согласно предложению, двойственному следствию из основной теоремы (стр. 51), эти два пучка прямых должны быть перспективными; это означает, что пары соответственных прямых  $AB'$  и  $A'B$ ,  $AC'$  и  $A'C$ ,  $AD'$  и  $A'D, \dots$  должны пересекаться в точках, лежащих на некоторой прямой  $v$ . Более того, пусть  $O$  есть точка пересечения прямых  $u$  и  $u'$ ,  $U'$  есть точка прямой  $u'$ , соответствующая точке  $O$ , рассматриваемой как точка прямой  $u$ , а  $U$  — точка, соответствующая той же точке  $O$ , рассматриваемой как точка прямой  $u'$ ; тогда очевидно, что прямая  $v$  проходит через точки  $U$  и  $U'$ ; иными словами, она определяется точками  $U$  и  $U'$ . Прямая  $v$  не зависит поэтому от того или иного выбора точек  $A$  и  $A'$  центрами двух перспективных пучков. Результат нашего исследования может быть сформулирован следующим образом:

*Если между точками двух прямых, лежащих в одной плоскости, установлено проективное соответствие  $ABCD \dots \bar{\wedge} \bar{\wedge} A'B'C'D' \dots$ , то точки пересечения пар прямых  $AB'$  и  $A'B$ ,  $AC'$  и  $A'C$ ,  $BC'$  и  $B'C$ ,  $\dots$  лежат на одной прямой.*

Эта прямая называется *осью гомологии* рассматриваемого проективного соответствия.

Приведенное выше доказательство неприменимо в том случае, если точка  $O$  соответствует самой себе. Однако если это

обстоятельство имеет место, то соответствие между прямыми  $u$  и  $u'$  будет перспективным (стр. 51) и точки пересечения пар прямых, упомянутых в нашей теореме, должны, как легко видеть, лежать на прямой  $v$ , проходящей в этом случае точку  $O$ . В самом деле, если  $S$  есть центр перспективы прямых  $u$  и  $u'$ , то треугольники  $AB'C$  и  $A'BC'$  перспективны относительно центра  $S$  (фиг. 22).



Фиг. 22

относительно центра  $S$  (фиг. 22). Поэтому пары их соответственных сторон  $AB'$  и  $A'B$ ,  $B'C$  и  $BC'$ ,  $AC$  и  $A'C'$  должны пересекаться в точках, расположенных на одной прямой, причем одна из этих точек есть точка  $O$ .

Рассматривая теперь перспективные треугольники  $ABC'$  и  $A'B'C$ , мы подобным же образом найдем, что пары сторон  $AB$  и  $A'B'$ ,  $BC'$  и  $B'C$ ,  $AC'$  и  $A'C$  пересекаются в коллинеарных точках; одна из них есть точка  $O$ , в то же время еще одна совпадает с точкой пересечения какой-либо из предыдущих пар. Таким образом, теорема доказана также для того случая, когда проективное соответствие является перспективным; в этом случае ось гомологии проходит через точку пересечения прямых  $u$  и  $u'$ .

Предложение, двойственное на плоскости только что доказанной теореме, гласит:

*Если два пучка прямых, лежащих в одной плоскости, но имеющих разные центры, находятся в проективном соответствии, т. е.  $abcd \dots \wedge a'b'c'd' \dots$ , то прямые, соединяющие пары точек  $ab'$  и  $a'b$ ,  $ac'$  и  $a'c$ ,  $bc'$  и  $b'c$ ,  $\dots$ , сходятся в одной точке.*

Точка, в которой сходятся все эти прямые, называется *центром гомологии* проективного соответствия. Если пучки прямых не перспективны, то центром гомологии служит точка, в которой пересекаются две прямые, соответствующие общей прямой обоих пучков, рассматриваемой сначала как прямая одного пучка, а затем — как прямая другого пучка.

Читатель заметит, что три пары соответственных элементов определяют ось (центр) гомологии; пользуясь же этой последней, легко построить любое число других пар соответственных элементов.

**16. Двойные элементы. Эллиптическое, параболическое и гиперболическое проективные соответствия.** Мы рассмотрим теперь некоторые свойства проективных соответствий между элементами одной и той же формы первой степени. Если при проективном соответствии на прямой\* точка  $M$  соответствует самой себе, то она называется *двойной* точкой этого соответствия; подобным же образом, если при проективном соответствии пучка прямых прямая  $m$  соответствует самой себе, то она называется *двойной* прямой этого соответствия.

Согласно основной теореме, никакое проективное соответствие, не оставляющее неподвижными всех элементов формы, не может оставлять неподвижными более двух различных ее элементов. При этом могут представиться три возможности.

Проективное соответствие может не иметь ни одного двойного элемента; в этом случае оно называется *эллиптическим*.

Проективное соответствие может иметь только один двойной элемент; в этом случае оно называется *параболическим*.

Проективное соответствие может иметь два различных двойных элемента; в этом случае оно называется *гиперболическим*.

Мы докажем теперь следующую теорему:

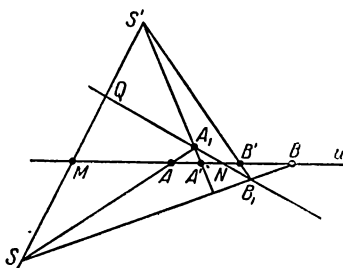
*Если проективное соответствие на прямой имеет одну двойную точку, то оно имеет вообще и вторую, которая может, однако, совпадать с первой.*

Чтобы доказать это, положим, что  $M$  есть двойная точка, а  $A, A'$  и  $B, B'$  суть две пары соответственных точек прямой  $u$  (фиг. 23). Возьмем две точки  $S$  и  $S'$ , коллинеарные с точкой  $M$ , и будем проектировать точки  $M, A, B$  и  $M, A', B'$

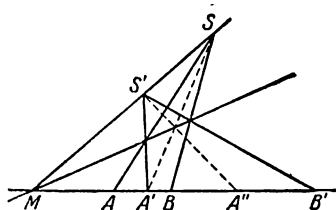
---

\* Т. е. при проективном преобразовании прямой в самое себя. (Прим. ред.)

соответственно из точек  $S$  и  $S'$ . В проективном соответствии  $S(MAB \dots) \bar{\wedge} S'(MA'B' \dots)$  прямая  $SM = S'M$  соответствует самой себе, и, следовательно, это соответствие является перспективным (стр. 51). Точки пересечения пар прямых  $SA$  и  $S'A'$ ,  $SB$  и  $S'B'$ , ... лежат на оси перспективы  $A_1B_1$ . Точка  $N$ , в которой ось  $A_1B_1$  пересекает прямую  $u$ , есть, очевидно, двойная точка проективного соответствия на прямой  $u$ . Точка  $N$ , вообще говоря, отлична от точки  $M$ , но может и совпадать с ней (если прямая  $A_1B_1$  проходит через точку  $M$ ). Таким образом, теорема доказана.



Фиг. 23



Фиг. 24

Пользуясь обозначениями доказанной теоремы, мы можем сказать, что проективное соответствие с двойной точкой  $M$  будет параболическим, т. е. будет иметь единственную двойную точку  $M$  в том и только в том случае, если прямая  $A_1B_1$  проходит через точку  $M$ . Это дает способ построения параболического соответствия, если дана двойная точка и одна пара соответственных точек (фиг. 24).

Предшествующие рассуждения доказывают существование гиперболического и параболического проективных соответствий для форм первой степени; они дают нам также способ построения гиперболического или параболического соответствия, если заданы двойные точки (двойная точка) и еще одна пара соответственных точек; наконец, они показывают, как построить вторую двойную точку, если задана одна двойная точка и еще две пары соответственных точек. Существование эллиптического проективного соответствия будет вскоре установлено.

Прежде чем закончить рассмотрение свойств параболиче-



ских соответствий, мы воспользуемся фиг. 24, чтобы доказать еще одну относящуюся к ним теорему. Если параболическое проективное соответствие, имеющее двойную точку  $M$ , преобразует точку  $A$  в точку  $A'$ , а точку  $A'$  — в точку  $A''$ , то из чертежа непосредственно видно, что точка  $A''$  гармонически сопряжена с точкой  $A$  по отношению к точкам  $M$  и  $A'$ . Следовательно, имеет место теорема:

*Если параболическое проективное соответствие с двойной точкой  $M$  преобразует точку  $A$  в точку  $A'$ , а точку  $A'$  — в точку  $A''$ , то пары точек  $MA'$  и  $AA''$  гармонически делят друг друга.*

Для гиперболических проективных соответствий имеет важное значение следующая теорема:

*Если в гиперболическом проективном соответствии с двойными точками  $M$  и  $N$  мы имеем  $MNAB \overline{\wedge} MNA'B'$ , то мы имеем также и  $MNAA' \overline{\wedge} MNBB'$ .*

В самом деле, если на фиг. 23 мы обозначим через  $Q$  точку пересечения прямых  $SS'$  и  $A_1B_1$ , то тотчас же получим

$$MNA A' \stackrel{A_1}{\overline{\wedge}} MQSS' \stackrel{B_1}{\overline{\wedge}} MNBB'.$$

**17. Инволюции.** Если проективное соответствие на прямой преобразует точку  $A$  в отличную от нее точку  $A'$ , а точку  $A'$  — в точку  $A$ , то говорят, что точки  $A$  и  $A'$  находятся в двойном соответствии друг с другом.

*Если в проективном соответствии между точками одной и той же прямой две точки, отличные одна от другой, находятся в двойном соответствии, то и любые другие соответственные точки находятся в двойном соответствии друг с другом.*

Для доказательства этого предложения положим, что  $A$  и  $A'$  суть две различные точки, находящиеся в двойном соответствии друг с другом, и что  $B$  и  $B'$  есть другая пара соответственных точек (фиг. 25). Пусть, далее,  $u_1$  есть прямая, проходящая через точку  $A$  и отличная от прямой  $AA'$ , и пусть точки  $A', B, B'$  проектируются из центра  $S$  в точки  $A'_1, B_1, B'_1$  прямой  $u_1$ . Тогда, обозначив через  $C$  точку пересечения прямых  $B'B_1$  и  $A'S$ , будем иметь

$$AA'BB' \stackrel{S}{\overline{\wedge}} AA'_1B_1B'_1 \stackrel{B'_1}{\overline{\wedge}} A'A'_1CS \stackrel{B_1}{\overline{\wedge}} A'AB'B,$$

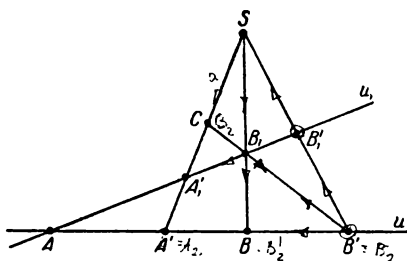
так что

$$AA'BB' \overline{\wedge} A'AB'B.$$

Это показывает, что проективное соответствие, определенное тремя соответственными парами,  $AA'B \overline{\wedge} A'AB'$ , преобразует точку  $B'$  в точку  $B$ . Как непосредственное следствие мы получаем теорему:

*Если  $A, A', B, B'$  суть четыре точки некоторой прямой, то всегда существует проективное соответствие, преобразующее точки  $A, A', B, B'$  соответственно в точки  $A', A, B', B$ .*

Проективное соответствие, в котором каждые два соответственных элемента находятся в двойном соответствии, называется



Ф и г. 25

инволюцией. Оно осуществляет полное разбиение элементов данной формы на пары; каждая такая пара соответственных элементов называется сопряженной парой инволюции. Две такие сопряженные пары полностью определяют

инволюцию (стр. 51). Если три пары точек представляют собой сопряженные пары одной и той же инволюции, то говорят, что эти три пары находятся в инволюции или входят в состав инволюции.

*Если  $M$  и  $N$  суть двойные точки инволюции, а  $A$  и  $A'$  есть какая-либо сопряженная ее пара, то эти точки ( $A$  и  $A'$ ) образуют гармоническую пару по отношению к точкам  $M$  и  $N$ .*

Это непосредственно вытекает из самого построения проективного соответствия  $MAA' \overline{\wedge} MA'A$  (стр. 55—6). Отсюда, далее, следует, что если инволюция имеет одну двойную точку, то она имеет и вторую, отличную от первой. Поэтому инволюция может быть либо гиперболической, либо эллиптической. Легко видеть, что две сопряженные пары гиперболической инволюции никогда не разделяют друг друга. Действительно, если  $M$  и  $N$  суть отличные друг от друга двойные точки такой инволюции,  $A$  и  $A'$  есть сопряженная пара точек той же инволюции, то последняя преобразует

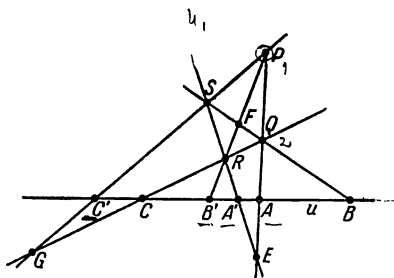
отрезок  $AMA'$  в отрезок  $A'MA$ , т. е. в тот же отрезок, но рассматриваемый в противоположном направлении. Поэтому точка, сопряженная с некоторой точкой  $B$  этого отрезка, должна являться точкой этого же отрезка. То же самое имеет место и для отрезка  $ANA'$ . Это значит, что две сопряженные пары такой инволюции не могут разделять одна другую. Отсюда следует, что инволюция, в которой две пары сопряженных точек разделяют друг друга, есть инволюция эллиптическая. Это доказывает существование эллиптических проективных соответствий\*.

Более того, если пары точек  $A, A'$  и  $B, B'$  не разделяют одна другую и точка  $B$  пробегает отрезок  $ABA'$ , то сопряженная с ней точка  $P'$  пробегает тот же отрезок  $A'BA$  в обратном направлении. Поэтому на этом отрезке должна существовать точка, в которой точки  $P$  и  $P'$  совпадают. Итак, имеет место теорема:

*Инволюция является эллиптической или гиперболической, смотря по тому, разделяют или не разделяют друг друга сопряженные пары точек.*

Основное значение имеет следующая теорема:

*Произвольная прямая, не проходящая через вершину полного четырехугольника, пересекает пары противоположных его сторон в трех парах точек, которые входят в состав инволюции.*



Ф и г. 26

Доказательство легко получается из рассмотрения фиг. 26. Пусть пары противоположных сторон полного четырехугольника  $PQRS$  пересекают прямую  $u$  в парах точек  $A, A'; B, B'; C, C'$ , как показано на чертеже. Так как диагональные точки полного четырехугольника не могут быть коллинеарными (стр. 41), то по крайней мере одна из этих пар должна представлять собой пару отличных одна от другой точек.

\* Напомним, что инволюция задается двумя произвольными парами точек (стр. 58). (Прим. ред.)

Пусть  $A$  и  $A'$  будет такая пара точек и пусть  $E$  — диагональная точка, определяемая парой противоположных сторон  $PQ$  и  $SR$  четырехугольника, которые определяют точки  $A$  и  $A'$ . В таком случае имеем

$$AA'B'C' \stackrel{P}{\wedge} EA'RS \stackrel{Q}{\wedge} AA'CB;$$

далее, согласно предыдущей теореме (стр. 58),  $AA'CB \wedge A'ABC$ . Отсюда

$$AA'B'C' \wedge A'ABC.$$

Это показывает, что точки  $C$  и  $C'$  представляют собой сопряженные точки инволюции, определяемой проективным соответствием  $AA'B' \wedge A'AB$ , иначе говоря, три пары точек —  $A, A'$ ;  $B, B'$ ;  $C, C'$ , входят в состав инволюции.

Последняя теорема дает нам способ построения точки  $C'$ , сопряженной с точкой  $C$  в инволюции, определяемой двумя парами  $AA'$  и  $BB'$ . Для этого достаточно построить полный четырехугольник таким образом, чтобы две пары противоположных его сторон проходили через точки  $A, A'$  и  $B, B'$  и одна из остающихся сторон — через точку  $C$ ; тогда шестая сторона пройдет через точку  $C'$ .

В качестве следствия из теоремы, предшествующей только что доказанной, имеем:

*Если две пары точек на прямой не разделяют друг друга, то существует одна и только одна пара точек на той же прямой, которая делит гармонически каждую из заданных пар точек; если две заданные пары точек разделяют одна другую, то не существует такой пары точек, которая делила бы гармонически обе эти пары.*

В самом деле, если какая-либо пара точек делит гармонически каждую из заданных двух пар, то она должна состоять из двойных точек инволюции, определяемой двумя заданными парами (стр. 58). Эта инволюция может иметь двойные точки в том и только в том случае, если заданные две пары не разделяют одна другую (стр. 59).

Если мы будем рассматривать заданные две пары точек как пары двойных точек двух гиперболических инволюций, то та пара точек, которая делит гармонически каждую из этих пар двойных точек, будет общей сопряженной парой обеих инволюций. Это показывает, что *две гиперболические*

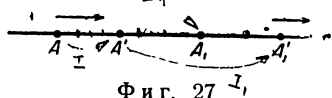
*инволюции на одной и той же прямой имеют общую сопряженную пару точек в том и только в том случае, если пары двойных точек обеих инволюций не разделяют друг друга.*

Все это ставит перед нами вопрос, имеющий большое значение для дальнейших рассуждений, а именно, о том, при каких условиях две инволюции на одной и той же прямой имеют общую сопряженную пару точек. Мы получили ответ на этот вопрос для того случая, когда обе инволюции являются гиперболическими. Остается рассмотреть случаи, когда одна или обе инволюции являются эллиптическими. Пусть  $I$  и  $I_1$  обозначают две рассматриваемые инволюции; положим, что инволюция  $I$  преобразует точку  $A$  в точку  $A'$ , а инволюция  $I_1$  — точку  $A'$  в точку  $A_1'$ . Обозначим через  $I_1I$  проективное преобразование, представляющее собой результат обеих инволюций, выполненных в указанном порядке, т. е. проективное соответствие, преобразующее точку  $A$  в точку  $A_1'$ . Очевидно, что если точки  $M, N$  образуют сопряженную пару, принадлежащую обоим инволюциям  $I$  и  $I_1$ , то обе эти точки являются двойными точками соответствия  $I_1I$ , и обратно. Таким образом, вопрос о том, имеют инволюции  $I$  и  $I_1$  общую сопряженную пару или не имеют, сводится к тому, имеет проективное соответствие  $I_1I$  двойные точки или нет.

Чтобы ответить на этот вопрос, следует установить различие между проективными соответствиями *прямого* и *обратного типа*. Пусть нам дано проективное соответствие на прямой, преобразующее точку  $P$  в точку  $P'$ . Положим, что точка  $P$  непрерывно движется по прямой в одном из двух возможных направлений. Тогда  $P'$  также будет непрерывно перемещаться по прямой (стр. 49). Если при этом проективном соответствии движение точек  $P$  и  $P'$  будет происходить в одну и ту же сторону, то мы будем называть его соответствием *прямого типа*; если же точки  $P$  и  $P'$  движутся в противоположные стороны, то будем называть его соответствием *обратного типа*. Проективное соответствие обратного типа всегда имеет двойные точки; в самом деле, если точки  $P$  и  $P'$  движутся по прямой в противоположные стороны, то на прямой должны существовать точки, в которых точки  $P$  и  $P'$  совпадают. Мы уже пользовались этим соображением, когда рассматривали вопрос о существовании двой-

ных точек инволюции (стр. 59). Мы приходим, таким образом, к тому, что гиперболическая инволюция всегда представляет собой соответствие обратного типа, между тем как эллиптическая инволюция всегда есть соответствие прямого типа. В отношении проективных соответствий, не являющихся инволюциями, дело обстоит не столь просто: неинволюционное проективное соответствие прямого типа может иметь двойную точку.

Возвратимся к рассматриваемой проблеме; если одна из двух инволюций  $I, I_1$  есть эллиптическая, а другая — гиперболическая, то одна из них, как мы знаем, представляет собой соответствие прямого, а другая — обратного типа. Преобразование  $I_1 I$  будет поэтому соответствием обратного типа и должно иметь двойные точки. Таким образом, эллиптическая



и гиперболическая инволюции всегда имеют общую сопряженную пару точек. Если, наконец, обе инволюции  $I$  и  $I_1$  суть эллиптические, то проек-

тивное соответствие  $I_1 I$  будет соответствием прямого типа, и вопрос требует дальнейшего исследования.

Пусть  $A'$  есть точка, сопряженная с точкой  $A$  в инволюции  $I$ , и пусть  $A_1, A'_1$  будут точки, сопряженные соответственно с точками  $A, A'$  в инволюции  $I_1$ . Проективное соответствие  $I_1 I$  преобразует точку  $A$  в точку  $A'_1$ , а точку  $A'$  — в  $A_1$  и является соответствием прямого типа. Более того, так как  $I_1$  есть инволюция эллиптическая, то пары точек  $A, A_1$  и  $A', A'_1$  разделяют одна другую (стр. 59). Отсюда легко видеть, что в одном из двух направлений на прямой рассматриваемые четыре точки располагаются в порядке  $A, A', A_1, A'_1$ . Если точка  $P$  пробегает отрезок  $AA'$  в направлении, указанном стрелкой (фиг. 27), то соответствующая ей в проективном соответствии  $I_1 I$  точка  $P'$  пробегает отрезок  $A'_1 A_1$  в том же направлении. Отрезок  $AA'$  содержится в отрезке  $A'_1 A_1$ , и потому на первом из них должна существовать точка  $M$ , отвечающая совпадающим положениям точек  $P$  и  $P'$ . Это значит, что проективное соответствие  $I_1 I$  должно иметь двойную точку. Оно должно иметь еще и другую двойную точку

$N (\neq M)$ , так как точка, сопряженная с точкой  $M$  в инволюции  $I$ , должна совпадать с точкой, сопряженной с  $M$  в инволюции  $I_1$ . Точки  $M$  и  $N$  образуют общую сопряженную пару обеих инволюций  $I$  и  $I_1$ . Мы приходим, таким образом, к теореме:

*Две инволюции, из которых по крайней мере одна есть эллиптическая, всегда имеют общую сопряженную пару.*

В предшествующих рассуждениях мы молчаливо допускали, что точки  $A'$  и  $A_1$  различны. Если, однако,  $A' = A_1$ , то пара  $A, A'$  и будет общей парой обеих инволюций, и никакого дальнейшего доказательства не требуется.

## ТЕОРЕМЫ ПАСКАЛЯ И БРИАНШОНА

**18. Определение ряда точек второго порядка и пучка прямых второго порядка.** Если точки  $S$  и  $S'$  ( $S \neq S'$ ) суть центры двух пучков прямых в одной и той же плоскости и если между прямыми двух пучков установлено проективное соответствие, то каждой прямой пучка  $S$  соответствует однозначно определенная прямая пучка  $S'$ . Точки пересечения всех пар соответственных прямых образуют кривую, которую мы будем называть *рядом точек второго порядка* или *кривой второго порядка*. Если проективное соответствие между двумя данными пучками прямых есть перспектива, то точки пересечения соответственных прямых будут все лежать на прямой, служащей осью перспективы, и на прямой  $SS'$ , которая соответствует самой себе \*. Этот случай так называемой „вырожденной“ кривой второго порядка мы исключим из рассмотрения, по крайней мере, этой главы. Таким образом, мы приходим к следующему определению: геометрическое место точек пересечения пар соответственных прямых двух проективных, но не перспективных пучков прямых, имеющих различные центры и расположенных в одной плоскости, называется *рядом точек второго порядка (кривой второго порядка)*.

Согласно основной теореме (стр. 51), проективное соответствие между двумя пучками прямых полностью определяется заданием трех пар соответственных прямых. Если прямым  $a, b, c$  пучка  $S$  отвечают соответственно прямые  $a', b', c'$  пучка  $S'$ , то точки  $aa' = A, bb' = B$  и  $cc' = C$ , по определению,

---

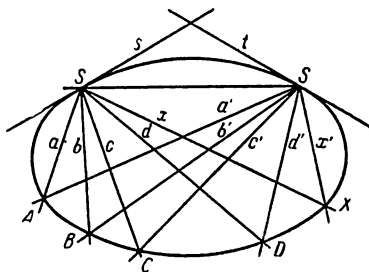
\* Так как при перспективном соответствии прямая  $SS'$  соответствует самой себе, то каждую ее точку можно рассматривать как общую точку двух соответственных прямых, как точку их пересечения. (*Прим. ред.*)



суть точки кривой второго порядка; обратно, если нам заданы точки  $S$  и  $S'$  как центры двух пучков, производящих это коническое сечение, и три другие неколлинеарные точки  $A, B, C$ , то этим однозначно определяется кривая второго порядка, порождаемая пучками  $S$  и  $S'$  и проходящая через точки  $A, B, C$ .

Заметим сейчас же, что определенная таким образом кривая второго порядка проходит через точки  $S$  и  $S'$ .

В самом деле, прямой  $SS'$ , рассматриваемой как прямая пучка  $S$ , соответствует прямая  $t'$  пучка  $S'$ , и эти две соответственные прямые пересекаются в точке  $S'$ ; подобным же образом прямой  $S'S$ , рассматриваемой как прямая пучка  $S'$ , соответствует прямая  $s$  пучка  $S$ , и эти две соответственные прямые пересекаются в точке  $S$ . Более того, прямая  $t'$ , очевидно, не имеет никаких других общих точек с этой кривой второго порядка, кроме точки  $S'$ , а прямая  $s$  пересекает кривую только в точке  $S$ . Если мы теперь определим *касательную* к кривой второго порядка как прямую, лежащую в ее плоскости и пересекающую эту кривую только в одной точке, то прямые  $s$  и  $t'$  будут двумя касательными. Ясно также, что прямые  $s$  и  $t'$  представляют собой предельные положения прямых  $x$  и  $x'$  соответственно, когда точка  $X$ , двигаясь по кривой, приближается к точкам  $S$  и  $S'$ . Прямые  $s$  и  $t'$  представляют собой, следовательно, касательные к кривой и в смысле этого последнего определения.



Ф и г. 28

Образ, двойственный на плоскости кривой второго порядка, называют *пучком прямых второго порядка*; это есть совокупность всех прямых линий, соединяющих попарно соответственные точки двух проективных, но не перспективных, прямолинейных рядов точек, которые лежат в одной плоскости, но на двух различных прямых. Точка в плоскости пучка второго порядка, через которую проходит только одна прямая этого пучка, называется *точкой прикосновения* пучка прямых второго порядка,



более ясным при другой формулировке, использующей весьма замечательное предложение, известное под именем теоремы Паскаля. В связи с этим мы обратимся к этой теореме и пока отложим рассмотрение задачи о построении кривой второго порядка.

**20. Теорема Паскаля.** Чтобы выразить результат последнего параграфа в более удобной форме и этим путем получить доказательство теоремы Паскаля, нам необходимо ввести понятие о простом плоском шестиугольнике. Положим, что в плоскости *в определенном циклическом порядке* заданы шесть точек  $(A, B, C, D, E, F)$ , из которых никакие три не коллинеарны; соединяя *последовательные* точки попарно, получаем шесть прямых  $(AB, BC, CD, DE, EF, FA)$ ; фигура, состоящая из этих точек и прямых, называется *простым плоским шестиугольником*. Шесть заданных точек называются *вершинами* шестиугольника, а шесть прямых — его *сторонами*. Далее, эти стороны могут быть сгруппированы в пары так называемых *противоположных сторон*; так, например, стороны  $AB$  и  $DE$  являются противоположными; подобным же образом противоположны и стороны  $BC$  и  $EF$ ,  $CD$  и  $FA$ . Вершины  $A$  и  $D$ ,  $B$  и  $E$ ,  $C$  и  $F$  также носят название *противоположных*.

Вернемся теперь к результатам предыдущего параграфа. Будем рассматривать простой шестиугольник  $SABCS'X$ , определяемый шестью точками нашей кривой второго порядка, взятыми в указанном порядке\*. Противоположные стороны этого шестиугольника пересекаются попарно в следующих точках:

$$\begin{aligned} SA \text{ и } CS' &\text{ — в точке } O, \\ AB \text{ и } S'X &\text{ — в точке } X'', \\ BC \text{ и } XS &\text{ — в точке } X'. \end{aligned}$$

Но точки  $O, X'', X'$  коллинеарны по построению. Полученный результат может быть сформулирован следующим образом:

---

\* Когда мы говорим, что точки взяты в заданном порядке, то этого отнюдь не нужно понимать в том смысле, что они следуют в этом порядке одна за другой при обходе кривой в определенном направлении. В шестиугольнике  $ABCDEF$  принимаем в качестве следующей за  $A$  любую из пяти остальных точек. (Прим. ред.)

*Если  $ABCX$  суть четыре точки кривой второго порядка, порождаемой пучками прямых с центрами  $S$  и  $S'$ , то противоположные стороны простого шестиугольника  $SABCS'X$  пересекаются попарно в трех точках, лежащих на одной прямой.*

Теорема, обратная данной, доказывается без труда. Но простой шестиугольник  $CS'XSAB$  есть тот же шестиугольник, что и  $SABCS'X$ . Отсюда если  $A, B, C, X$  суть точки кривой второго порядка, порождаемой пучками прямых с центрами  $S$  и  $S'$ , то и точки  $S', X, S, B$  суть точки кривой второго порядка, порождаемой пучками с центрами  $C$  и  $A$ . Но три точки вместе с центрами производящих пучков полностью определяют кривую второго порядка. Таким образом, мы имеем две кривые: одну, определяемую центрами  $S$  и  $S'$  и тремя точками  $A, B, C$ , и другую, определяемую центрами  $C, A$  и тремя точками  $S, S', B$ . Полученный нами результат показывает, что любая точка  $X$ , принадлежащая одной из этих двух кривых, принадлежит также и другой; иными словами, обе эти кривые совпадают. Это служит доказательством следующей основной теоремы:

*Кривая второго порядка полностью определяется пятью своими точками; при этом любые две из этих пяти точек могут быть приняты за центры проективных пучков, порождающих эту кривую.*

Но эта теорема показывает, что шесть точек  $S, S', A, B, C, X$  являются точками кривой второго порядка. Отсюда непосредственно вытекает следующая теорема:

*Теорема Паскаля. Для того чтобы шесть заданных точек принадлежали кривой второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы противоположные стороны простого шестиугольника, имеющего эти шесть точек своими вершинами, попарно пересекались в точках, лежащих на одной прямой.*

Эта теорема была доказана Блезом Паскалем (1623—1662) в возрасте всего шестнадцати лет. Его метод был, конечно, отличен от того, который мы применили здесь. Паскаль доказал теорему сначала для окружности, а затем сделал заключение о ее правильности для конических сечений, исходя из того, что коническое сечение может быть получено из окружности с помощью проектирования и сечения. Читатель должен

в настоящее время принять на веру тот факт, что ряд точек или кривая второго порядка, как мы ее определили, представляет собой обыкновенное коническое сечение, с которым он знаком по своим прежним занятиям (см. конец гл. VI).

Имея в виду важное значение этой теоремы, мы дадим ей еще следующую формулировку:

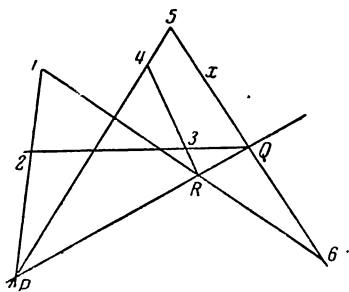
*Если 1, 2, 3, 4, 5, 6 суть точки кривой второго порядка, то точки пересечения прямых 12 и 45, 23 и 56, 34 и 61 лежат на одной прямой, и обратно.*

Эта прямая называется *паскалевой прямой* шестиугольника 123456.

Совокупность шести заданных точек дает возможность образовать 60 различных простых шестиугольников. Каждому из них соответствует одна паскалева прямая. Шестьдесят прямых, полученных таким образом из шести точек кривой второго порядка, образуют весьма замечательную конфигурацию. Ее изучение, однако, выходит из рамок настоящей книги (см. Veblen and Young, Projective Geometrie, т. I, стр. 138, пр. 19, Бостон — Нью-Йорк, 1910).

**21. Построение точек кривой второго порядка по пяти заданным точкам.** Теорема Паскаля дает простой способ построения кривой второго

порядка по пяти заданным точкам, вернее, построения любого числа точек кривой второго порядка. Пусть 1, 2, 3, 4, 5 — пять заданных точек кривой. Мы покажем, как построить шестую точку 6 на произвольной прямой, проходящей через точку 5. Пусть  $x$  будет некоторая прямая, проходящая через точку 5. Точка  $P$  пересечения прямых 12 и 45



Ф и г. 30

есть одна из точек паскалевой прямой шестиугольника 123456; точка  $Q$  пересечения прямых 23 и  $x$  ( $= 56$ ) есть вторая точка той же паскалевой прямой. Таким образом, паскалева прямая определена. Поэтому, согласно теореме Паскаля, если прямая  $PQ$  пересекает прямую 34 в точке  $R$ , то и прямая 61 должна



**23. Касательные. Точки прикосновения.** Прямая, лежащая в плоскости кривой второго порядка и встречающая эту кривую в одной и только одной точке  $P$ , называется *касательной* к этой кривой второго порядка *в точке  $P$* . Точка, лежащая в плоскости пучка второго порядка, через которую проходит одна и только одна прямая  $p$  этого пучка, называется *точкой прикосновения* пучка второго порядка *на прямой  $p$* .

*Через каждую точку кривой второго порядка проходит одна и только одна касательная к этой кривой.*

Действительно, пусть  $A$  будет произвольная точка кривой второго порядка,  $B$  — другая ее точка, а  $P$  — переменная точка той же кривой. Тогда пучки прямых с центрами  $A$  и  $B$  будут проективными, если соответственными считать прямые, проходящие через точку  $P$  (стр. 68). Прямая пучка  $A$  пересекает соответствующую ей прямую пучка  $B$  в точке, отличной от  $A$ , за исключением того случая, когда соответствующая ей прямая есть  $BA$ . В силу взаимной однозначности проективного соответствия, через точку  $A$  проходит одна и только одна прямая, которой соответствует прямая  $BA$ .

Следующее предложение двойственно на плоскости этой теореме:

*На каждой прямой пучка второго порядка существует одна и только одна точка прикосновения этого пучка.*

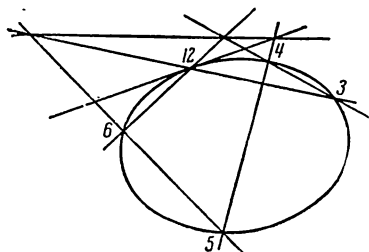
**24. Особые случаи теоремы Паскаля.** Касательная к кривой второго порядка может быть рассматриваема также как предельное положение секущей прямой, когда точки ее пересечения с кривой приближаются к совпадению. Исследуя различные предельные случаи, которые получаются, когда две вершины простого шестиугольника, вписанного в кривую второго порядка, стремятся к совпадению, мы получаем ряд важных особых случаев теоремы Паскаля и, согласно принципу двойственности, теоремы Брианшона.

Положим сначала, что совпадают вершины 1 и 2. Тогда сторона 12 будет касательной к кривой в точке  $1 = 2$ . Теорема Паскаля в этом случае устанавливает, что точка пересечения касательной 12 и стороны 45 лежит на прямой, соединяющей точки пересечения сторон 23 с 56 и 34 с 61. Иными словами:

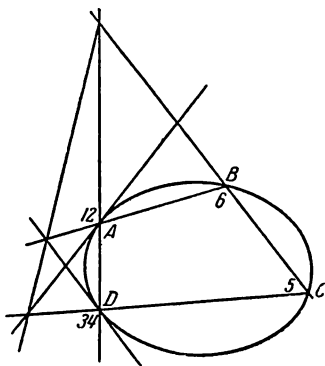
Если вершинами простого пятиугольника служат точки кривой второго порядка, то касательная к кривой в одной из его вершин пересекает противоположную сторону в точке, коллинеарной с точками пересечения двух других пар противоположных сторон (фиг. 32).

С помощью подобных же рассуждений, рассматривая сторону 12 как касательную ( $1=2$ ) и сторону 34 также как касательную ( $3=4$ ), мы получим следующий результат:

Если вершины  $A, B, C, D$  простого четырехугольника лежат на кривой второго порядка, то касательная в точке  $A$  и сто-

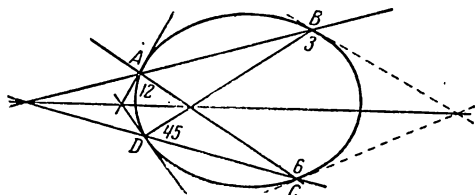


Фиг. 32



Фиг. 33

рона  $CD$ , касательная в точке  $D$ , и сторона  $AB$ , а также пара сторон  $AD$  и  $BC$  попарно пересекаются в точках, лежащих на одной прямой (фиг. 33).



Фиг. 34

Если теперь мы будем рассматривать как касательные две противоположные стороны нашего шестиугольника 12 и 45 (так что  $1=2$  и  $4=5$ ), то получим теорему:

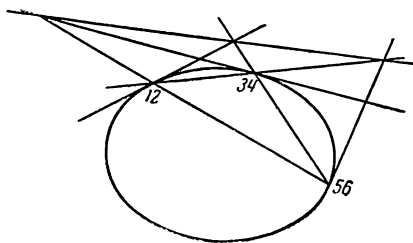
Если вершины полного четырехугольника лежат на кривой второго порядка, то точка пересечения касательных к кривой в двух его вершинах лежит на прямой, соединяющей



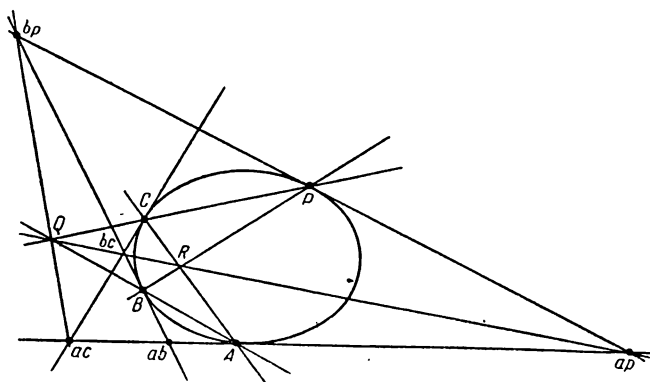
две диагональные точки четырехугольника; эти диагональные точки не лежат на той стороне четырехугольника, которая соединяет указанные две вершины (фиг. 34).

Если, наконец, мы будем рассматривать как касательные три стороны нашего шестиугольника, то получим:

Если три точки лежат на кривой второго порядка, то касательные к кривой в каждой из этих точек и прямые, соединяющие две другие точки, пересекаются в коллинеарных точках; иными словами, треугольник, вписанный в кривую второго порядка, и треугольник, образованный касательными к кривой в его вершинах, перспективны (фиг. 35).



Фиг. 35



Фиг. 36

**25. Касательные к кривой второго порядка образуют пучок второго порядка.** Ближайшее рассмотрение одной из теорем (стр. 72) последнего параграфа приводит к важному результату. Пусть  $A, B, C, P$  будут четыре точки кривой

второго порядка (фиг. 36), и пусть  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $p$  — соответственные касательные к кривой в этих точках. Согласно только что доказанной теореме, точка пересечения касательных  $b$  и  $c$  лежит на прямой, соединяющей диагональные точки  $R$  и  $Q$  четырехугольника  $ABCP$ . Согласно той же теореме, точка пересечения касательных  $a$  и  $p$  также лежит на прямой  $RQ$ . С помощью подобных рассуждений убедимся, что точки  $ac$ ,  $bp$  и  $Q$  также лежат на одной прямой. Далее, прямая  $AB$  есть ось гомологии (стр. 53) проективного соответствия между рядами точек на прямых  $a$  и  $b$ , определяемого соотношением

$$A(ab)(ac) \overline{\wedge} (ba)B(bc).$$

В этом соответствии точке  $ap$  отвечает точка  $bp$ ; это значит, что если мы будем рассматривать прямую  $p$  как переменную касательную, то она всегда будет соединять две соответственные точки на прямых  $a$  и  $b$ ; совокупность таких прямых  $p$ , таким образом, является пучком прямых второго порядка. Мы имеем, таким образом, следующую теорему:

*Касательные к кривой второго порядка образуют пучок второго порядка.*

Двойственной ей на плоскости теоремой будет следующая:

*Точки прикосновения пучка второго порядка образуют кривую второго порядка.*

Мы можем теперь дать определение фигуры, двойственной самой себе и называемой *коническим сечением*, как кривой второго порядка вместе с ее касательными (или как пучка второго порядка вместе с его точками прикосновения). Ясно, что если мы будем формулировать предложения, двойственные теоремам, относящимся к этой фигуре, то термин „коническое сечение“ будет сохраняться, между тем как слова „точка“ (конического сечения) и „прямая“ или „касательная“ (конического сечения) будут заменяться друг другом. Если точки плоской фигуры лежат на коническом сечении, то мы будем говорить, что эта фигура *вписана* в коническое сечение; если прямые линии плоской фигуры представляют собой касательные к коническому сечению, то говорят, что фигура *описана* около конического сечения. Предложения, двойственные теореме Паскаля и ее особым случаям, дают нам теперь ряд теорем в той же последовательности для пучков прямых второго порядка, что и для рядов точек второго порядка. В

качестве иллюстрации мы снова сформулируем теорему Брианшона с этой новой точки зрения.

**Теорема Брианшона.** *Прямые, соединяющие противоположные вершины простого шестиугольника, описанного около конического сечения, сходятся в одной точке, и обратно.*

Другая важная теорема легко получается из рассмотрения конического сечения.

*Если  $A$  есть неподвижная, а  $P$  — переменная точка конического сечения, и  $a$  и  $p$  суть соответственно касательные (неподвижная и подвижная) в этих двух точках, то  $\tilde{A}[P] \overline{\wedge} a[p]$ .*

Доказательство легко получить, пользуясь обозначениями фиг. 36. Прежде всего мы имеем

$$A[P] \overline{\wedge} C[P] \overline{\overline{\wedge}} [Q],$$

где  $[Q]$  есть ряд точек на прямой  $AB$ . Мы имеем также

$$[Q] \stackrel{ac}{\overline{\wedge}} b[p]$$

и (согласно стр. 68, двойственное предложение)

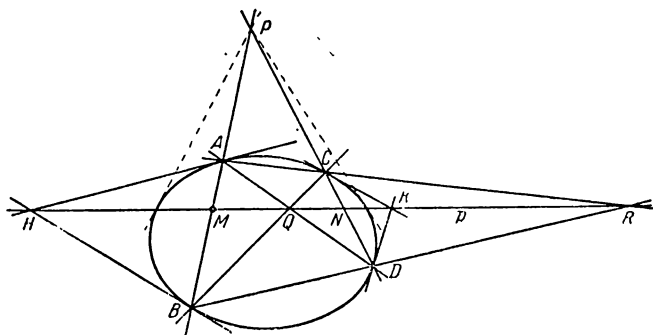
$$b[p] \overline{\wedge} a[p].$$

Сопоставляя эти соответствия, получим

$$A[P] \overline{\wedge} a[p].$$

**26. Полюсы и поляры конического сечения.** Положим, что нам дано коническое сечение и точка  $P$  в его плоскости, не лежащая на нем. Пусть  $AB$  и  $CD$  будут две прямые, проходящие через точку  $P$  и пересекающие коническое сечение соответственно в точках  $A, B$  и  $C, D$ . Обозначим точки пересечения прямых  $AD$  и  $BC$  через  $Q$ , а прямых  $AC$  и  $BD$  — через  $R$  (фиг. 37). Тогда ясно (стр. 72), что точки  $H$  и  $K$  пересечения касательных к коническому сечению в точках  $A, B$  и  $C, D$  лежат на прямой  $QR$ . Далее, если прямая  $QR$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $M$ , то из чертежа видно, что точка  $M$  гармонически сопряжена с точкой  $P$  по отношению к точкам  $A$  и  $B$ ; в самом деле, последние точки суть диагональные точки полного четырехугольника  $RCQD$ , противо-

положные стороны которого  $CD$  и  $RQ$  проходят соответственно через точки  $P$  и  $M$ . Подобным же образом точка  $N$ , в которой прямая  $QR$  пересекает прямую  $CD$ , гармонически сопряжена с точкой  $P$  по отношению к точкам  $C$  и  $D$ . Прямая  $p$  содержит, таким образом, точки  $H$ ,  $K$ ,  $M$  и  $N$ ; она



Фиг. 37

определяется, следовательно, точками  $H$  и  $M$ , а эти точки зависят только от прямой  $AB$ , проходящей через  $P$ . Если поэтому мы будем рассматривать прямую  $ABP$  как неподвижную, а прямую  $CDP$ —как переменную, то получим следующую теорему:

*Точка  $P$ , находящаяся в плоскости конического сечения, но не лежащая на нем, определяет однозначно прямую  $p$ , которая содержит*

1) две другие диагональные точки вписанного в коническое сечение полного четырехугольника, одной из диагональных точек которого служит  $P$ ,

2) точку, гармонически сопряженную с  $P$  относительно любых двух точек конического сечения, коллинеарных с  $P$ ,

3) точку пересечения касательных к коническому сечению в любых двух его точках, коллинеарных с  $P$ .

Прямая  $p$ , однозначно, таким образом, определяющаяся точкой  $P$  и коническим сечением, называется *полярной точкой  $P$  по отношению к коническому сечению*. Если точка  $P$  лежит на коническом сечении, то ее полярю по отношению к коническому сечению мы определим как касательную к коническому сечению в точке  $P$ .

Следующее предложение двойственно на плоскости последней теореме:

*Прямая  $p$ , лежащая в плоскости конического сечения, но не касательная к нему, однозначно определяет точку  $P$ , через которую проходят*

1) *две другие диагонали любого полного четырехсторонника, описанного около конического сечения и имеющего одной из своих диагоналей прямую  $p$ ,*

2) *прямая, гармонически сопряженная с прямой  $p$  относительно любых двух касательных к коническому сечению, пересекающихся на прямой  $p$ ,*

3) *прямая, соединяющая точки касания любых двух касательных к коническому сечению, пересекающихся на прямой  $p$ .*

Точка  $P$ , которая, таким образом, однозначно определяется прямой  $p$  и коническим сечением, называется *полюсом прямой  $p$  по отношению к коническому сечению*. Если прямая  $p$  есть касательная к коническому сечению, то за ее полюс по отношению к коническому сечению мы принимаем точку ее касания.

Таким образом, *каждой* точке, лежащей в плоскости конического сечения, оказывается отнесенной единственная прямая, *поляра* этой точки; и обратно, *каждой* прямой, расположенной в плоскости конического сечения, соответствует единственная точка, *полюс* этой прямой. Мы перейдем теперь к изучению соотношений между полюсами и полярами.

Прежде всего отметим, что соотношение между полюсом и полярой является взаимным, т. е.:

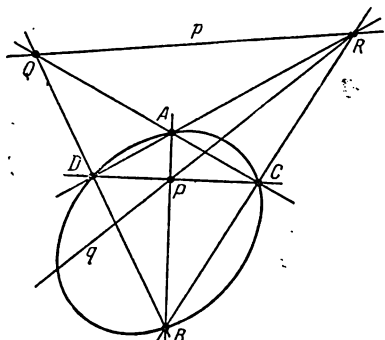
*Если прямая  $p$  есть поляра точки  $P$ , то точка  $P$  есть полюс прямой  $p$ .*

В самом деле, если точка  $P$  не лежит на коническом сечении, то это следует из сопоставления свойств 3) на стр. 76 и 77. Если же точка  $P$  лежит на коническом сечении, то это следует из определения. Рассматривая касательные как предельные положения секущих, мы получим следующее очевидное предложение:

*Поляра точки  $P$  по отношению к коническому сечению проходит через точки касания касательных, проходящих через точку  $P$ , если только эти касательные существуют.*

**27. Полярная система, связанная с коническим сечением.** Мы видели, что коническое сечение определяет взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми плоскости, и именно так, что каждой точке соответствует ее полярная прямая и каждой прямой — ее полюс. Такое соответствие называется *полярной системой*. Мы переходим теперь к несколько более обстоятельному изучению ее свойств.

Прежде всего, мы поставим перед собой вопрос: если точка движется по прямой  $p$ , то как при этом перемещается



Фиг. 38

полюса этой точки? Предположим сначала, что прямая  $p$  не есть касательная к коническому сечению. Пусть точка  $P$  есть полюс прямой  $p$  (не лежащий, следовательно, на коническом сечении), и пусть  $Q$  — некоторая точка прямой  $p$ , а  $A$  — точка, лежащая на коническом сечении. Пусть, далее, прямые  $AP$  и  $AQ$  встречаются соответственно еще в точках  $B$  и

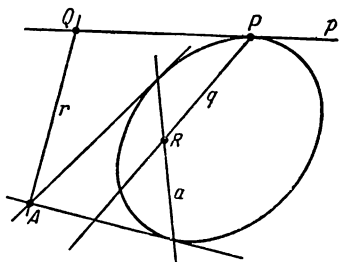
$C$ , а прямая  $PC$  встречается кривую еще в точке  $D$  (фиг. 38). Точка  $P$  есть диагональная точка полного четырехугольника  $ABCD$ ; отсюда следует (стр. 72), что две другие его диагональные точки лежат на прямой  $p$ . Это значит, что прямая  $BD$  проходит через точку  $Q$ , а прямые  $AD$  и  $BC$  встречаются в точке  $R$  прямой  $p$ . Следовательно, прямая  $q = PR$  есть полярная точка  $Q$ . Если теперь мы будем считать точку  $A$  и прямую  $p$  неподвижными, то неподвижными будут также и точки  $P$  и  $B$ . Если мы предположим, что точка  $Q$  движется по прямой  $p$ , то точки  $C$  и  $D$  и прямая  $q$  также будут перемещаться, причем последняя все время будет проходить через неподвижную точку  $P$ . Пучки прямых  $A[C]$  и  $B[C]$  проективны (стр. 68). Отсюда имеем

$$[Q] \overline{\wedge} A[C] \overline{\wedge} B[C] \stackrel{p}{\wedge} [q].$$

Ответ на поставленный в начале этого параграфа вопрос дает следующая теорема:

*Если точка  $Q$  движется по прямой  $p$ , то ее поляр вращается вокруг полюса  $P$  этой прямой; при этом проективный ряд точек  $[Q]$  проективен пучку прямых  $[q]$ , и обратно.*

Данное нами доказательство этого важного предложения пригодно лишь в том случае, когда прямая  $p$  не есть касательная к коническому сечению. Чтобы доказать это предложение и для того случая, когда прямая  $p$  является касательной, положим, что  $P$  есть точка касания (полюс) прямой  $p$  (фиг. 39). Пусть  $Q$  есть некоторая точка прямой  $p$ , а  $A$  — точка пересечения определенных двух касательных к коническому сечению. Обозначим прямую  $AQ$  через  $r$ , а ее полюс — через  $R$ ; последний должен лежать на поляре  $a$  точки  $A$ . Тогда прямая  $PR = q$  есть, очевидно, поляр точки  $Q$ . Мы имеем, следовательно,



Фиг. 39

$$[Q] \overline{\wedge} [r] \overline{\wedge} [R] \overline{\wedge} [q] \quad \text{или} \quad [Q] \overline{\wedge} [q],$$

что и требовалось доказать.

**28. Сопряженные точки. Сопряженные прямые.** Мы дадим теперь несколько определений. Две точки называются *сопряженными* по отношению к коническому сечению (или по отношению к полярной системе), если поляр каждой из этих точек проходит через другую точку. Две прямые называются *сопряженными* относительно конического сечения, если полюс каждой из них лежит на второй прямой.

Каждой точке, лежащей в плоскости конического сечения, соответствует бесчисленное множество сопряженных с ней точек, а именно, все точки ее поляры; а в силу принципа двойственности, каждой прямой, лежащей в плоскости конического сечения, соответствует бесчисленное множество сопряженных с ней прямых, а именно, — все прямые,

проходящие через ее полюс. Единственными точками, сопряженными самим себе, являются точки, лежащие на коническом сечении; прямыми, сопряженными самим себе, являются только касательные к коническому сечению.

Предположим теперь, что прямая  $p$  не является касательной к коническому сечению. Каждая точка  $Q$  этой прямой имеет сопряженную с ней точку  $Q'$ , лежащую на той же прямой, а именно, точку пересечения прямой  $p$  с полярной  $q$  точки  $Q$ . Соответствие между точками  $Q$  и  $Q'$ , очевидно, есть соответствие проективное (стр. 79); более того, это есть инволюция, так как точке  $Q'$  соответствует точка пересечения прямой  $p$  с полярной  $q'$  точки  $Q'$ , которая проходит через точку  $Q$ . Итак, имеет место следующая теорема:

*На каждой прямой, не являющейся касательной к коническому сечению, существует бесчисленное множество пар точек, сопряженных между собой по отношению к коническому сечению, и эти пары сопряженных точек суть пары некоторой инволюции.*

Мы будем называть эту инволюцию *инволюцией сопряженных точек на прямой*.

Предложение, двойственное на плоскости последней теореме, гласит:

*В каждой пучке прямых, центр которых не лежит на коническом сечении, существует бесчисленное множество пар прямых, сопряженных по отношению к коническому сечению, и эти пары сопряженных прямых суть пары некоторой инволюции.*

Заметим, далее, что инволюция сопряженных точек прямой будет иметь двойные точки в том и только в том случае, если эта прямая имеет общие точки с коническим сечением, а именно, точки пересечения этой прямой с коническим сечением являются двойными точками.

Следовательно, инволюция сопряженных точек на прямой (не касательной к коническому сечению) будет гиперболической или эллиптической, в зависимости от того, пересекает эта прямая коническое сечение или нет. Подобным же образом инволюция сопряженных прямых, проходящих через некоторую точку (не лежащую на коническом сечении), будет гиперболической или эллиптической, в зави-



*симости от того, существуют ли касательные к коническому сечению, проходящие через эту точку, или нет.*

**29. Принцип двойственности на плоскости.** Мы имеем теперь возможность указать один из методов доказательства принципа двойственности на плоскости, о котором мы упоминали на стр. 31. Предположим, что нам дана на плоскости некоторая фигура  $F$ . Построим фигуру  $F'$  путем замены каждой прямой фигуры  $F$  ее полюсом по отношению к какому-либо коническому сечению на этой плоскости и каждой точки фигуры  $F$  ее полярной по отношению к тому же коническому сечению. Каждой точке фигуры  $F$  будет тогда соответствовать прямая фигуры  $F'$  и каждой прямой фигуры  $F$  — точка фигуры  $F'$ . Более того, если прямая фигуры  $F$  проходит через некоторую ее точку, то соответствующая точка фигуры  $F'$  лежит на соответствующей прямой той же фигуры.

Если два ряда точек (пучка прямых) фигуры  $F$  проективны, то соответствующие пучки прямых (ряды точек) фигуры  $F'$  также проективны (стр. 79). Отсюда следует, что каждое проективное свойство фигуры  $F$  воспроизводится соответствующим свойством фигуры  $F'$ , в котором точки и прямые фигуры  $F$  меняются ролями.

## МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

**30. Проективные и метрические свойства.** До сих пор мы ограничивали наше внимание чисто проективными свойствами фигур, т. е. такими их свойствами, которые не изменяются при проективных преобразованиях. Такие понятия как параллельность, перпендикулярность, расстояние, угол и т. д. не находили себе места в наших рассуждениях и не могли там фигурировать, так как они относятся к свойствам, не остающимся неизменными при всех проективных преобразованиях.

Однако между метрическими и проективными свойствами фигур существуют некоторые связи, и эти связи мы намерены сейчас исследовать. К этой задаче можно подойти двумя различными путями. Первый и более простой путь заключается в том, чтобы считать известной элементарную метрическую (эвклидову) геометрию и с ее помощью непосредственно исследовать соотношения между некоторыми из метрических свойств и проективными свойствами фигур, с которыми мы познакомились в предшествующих главах. Напомним, что наше понятие проективного пространства мы строили путем присоединения к элементам хорошо знакомого нам метрического эвклидова пространства некоторых идеальных или несобственных элементов. Выражаясь более точно, мы приобщили к нашему метрическому пространству идеальную или бесконечно удаленную плоскость. Точки и прямые этой плоскости образовали при этом идеальные или несобственные точки и прямые, так называемые бесконечно удаленные точки и прямые. Все остальные точки, прямые и плоскости пространства мы рассматривали как собственные его элементы. Расширив наше понятие пространства путем введения несобственных точек и прямых и несобственной плоскости, мы завершили определение понятия проективного пространства,

устранив какое бы то ни было различие между собственными и несобственными элементами; точки, прямые и плоскости проективного пространства рассматривались как классы, состоящие из тождественных элементов, так что элементы каждого из этих классов различались между собой только по своим положениям.

Первый метод подхода к изучению метрических свойств в проективном аспекте заключается в том, чтобы восстановить различия между собственными и несобственными элементами, между обыкновенными и бесконечно удаленными точками и прямыми. В этом порядке идей мы должны были бы, например, принять, что параллельные прямые пересекаются в точке, лежащей на бесконечно удаленной прямой плоскости, в которой они лежат; мы установили бы, что точка, гармонически сопряженная с серединой отрезка  $AB$  некоторой прямой, есть бесконечно удаленная точка этой прямой (см. ниже); мы показали бы, что две перпендикулярные друг другу прямые на плоскости всегда пересекают бесконечно удаленную прямую этой плоскости в паре точек одной и той же инволюции и т. д.

Второй метод подхода, менее элементарный, но более изящный, заключается в том, чтобы забыть наши прежние сведения из элементарной метрической геометрии и рассматривать проективную геометрию как основную форму геометрии, из которой без каких-либо предварительных допущений могут быть развиты другие формы геометрии, и таким образом подтвердить слова Кэли „проективная геометрия есть вся геометрия“. Этот метод подхода по существу столь же прост, как и описанный выше, несмотря на то, что он исходит из совершенно другой точки зрения. Следуя второму методу, мы не предполагаем каких-либо предварительных сведений о метрических свойствах. Мы начинаем с того, что некоторую (любую) произвольно выбранную плоскость проективного пространства принимаем за „несобственную“ плоскость и по отношению к этой несобственной плоскости устанавливаем ряд определений\*. Все точки и прямые этой плоскости мы

---

\* Введение „несобственной“ прямой само по себе приводит только к аффинной геометрии; переход к метрической геометрии требует еще дополнительных соглашений, которые указаны ниже в п. 33 (подробнее об этом см. в гл. IX). (*Прим. ред.*)

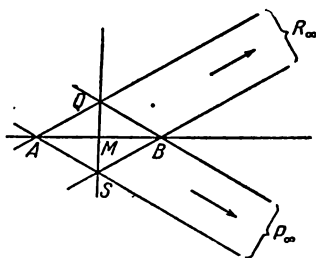
будем называть несобственными. Две прямые, лежащие в одной плоскости, мы *будем называть* параллельными, если они пересекаются в несобственной точке; серединой отрезка  $AB$ , соединяющего две различные точки  $A$  и  $B$ , по определению, назовем точку, гармонически сопряженную с несобственной точкой прямой  $AB$  по отношению к точкам  $A$  и  $B$ ; выберем произвольно некоторую (эллиптическую) инволюцию на несобственной прямой данной нам плоскости и назовем ее абсолютной или ортогональной инволюцией и затем *определим* перпендикулярные друг другу прямые как прямые, пересекающие несобственную прямую в паре сопряженных точек ортогональной инволюции и т. д. Читатель заметит, что из этих определений непосредственно вытекают некоторые из знакомых ему теорем относительно параллельных и перпендикулярных прямых, как, например, теорема о том, что две прямые, параллельные одной и той же третьей прямой, параллельны между собой; или что две прямые на плоскости, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны; что прямая, лежащая в плоскости двух параллельных прямых и перпендикулярная к одной из них, перпендикулярна также и к другой.

Несмотря на свою кажущуюся простоту, второй метод подхода включает в себе некоторые трудности, если все метрические понятия определять в проективных терминах. Нам кажется поэтому целесообразным воспользоваться некоторым сочетанием обоих методов. Мы начнем со второго метода и, как и до сих пор, ограничимся рассмотрением фигур, расположенных в одной плоскости. В этой плоскости некоторую произвольно выбранную прямую мы будем рассматривать как особенную или несобственную. Эту прямую мы назовем *бесконечно удаленной прямой* и по отношению к ней и к лежащим на ней (несобственным) бесконечно удаленным точкам установим некоторые определения. Однако каждый раз, когда это окажется целесообразным, мы будем обращаться к нашим сведениям из элементарной метрической геометрии с целью показать, что установленные нами определения действительно находятся в согласии с тем, что нам известно из метрической геометрии. На более поздней стадии мы будем пользоваться только первым методом подхода, чтобы обойти некоторые затруднения. В последней главе мы снова вернемся

к задаче второго метода, т. е. к задаче построения всей метрической геометрии на проективном базисе.

**31. Параллельные прямые. Середина отрезка.** Две прямые, лежащие в одной плоскости, называются *параллельными*, если они пересекаются в бесконечно удаленной точке. Из этого определения непосредственно следует, что *две прямые, параллельные одной и той же третьей прямой, параллельны между собой* и что *через заданную точку можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной прямой*.

Дадим еще одно определение, имеющее основное значение. Если даны две различные точки  $A$  и  $B$ , то точка  $M$ , гармонически сопряженная с бесконечно удаленной точкой прямой  $AB$ , называется *серединной* отрезка  $AB$ ; говорят также, что точка  $M$  делит пополам отрезок  $AB$ .



Фиг. 40

Необходимо иметь в виду, что, с точки зрения описанного нами в предыдущем параграфе второго метода, мы не должны считать имеющими место никакие из заранее известных нам свойств определяемых терминов, пока не покажем, что они являются следствием доказанных здесь теорем проективной геометрии. Так, данное нами определение середины отрезка действительно находится в согласии с понятием, связанным с этим термином в нашей элементарной метрической геометрии; это можно видеть из следующих соображений (фиг. 40). Если мы проведем через точку  $A$  две произвольные прямые  $AQ$  и  $AS$ , а через точку  $B$  — прямые  $BS$  и  $BQ$ , параллельные соответственно прямым  $AQ$  и  $AS$ , то прямые  $AQ$  и  $SB$  пересекутся, по определению, в бесконечно удаленной точке, которую мы обозначим через  $R$ , а прямые  $AS$  и  $QB$ , в свою очередь, пересекутся также в бесконечно удаленной точке, которую обозначим через  $P$ . Полный четырехугольник  $PQRS$  будет в этом случае иметь точки  $A$  и  $B$  своими диагональными точками, а третья пара противоположных его

сторон будет проходить соответственно через точку  $M$  и через бесконечно удаленную точку прямой  $AB$ . Точка  $M$ , следовательно, по построению будет гармонически сопряжена с бесконечно удаленной точкой прямой  $AB$  по отношению к точкам  $A$  и  $B$ . С другой стороны, из известного предложения о том, что диагонали параллелограмма ( $AQBS$ ) делят друг друга пополам, следует, что точка  $M$  есть середина отрезка  $AB$ .

Это, конечно, только простое подтверждение того предположения, которое непосредственно возникает, если пользоваться средствами элементарной геометрии как уже известными. С точки зрения описанного нами второго метода подхода, сама теорема элементарной геометрии, послужившая нам для этого доказательства, а именно, теорема о том, что *диагонали параллелограмма делят друг друга пополам*, представляет собой непосредственное следствие теорем о гармонических четверках точек и следующих определений: простой четырехугольник  $ABCD$ , стороны которого  $AB$  и  $CD$  параллельны между собой, называется *параллелограммом*; прямые  $AC$  и  $BD$  являются *диагоналями* параллелограмма.

Другим примером того, что знакомые нам метрические теоремы предстают перед нами как частные случаи проективных теорем, могут служить следующие предложения:

*Если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника  $ABC$ , пересекает стороны его  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  соответственно в точках  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ , а  $C'$ ,  $A'$ ,  $B'$  суть точки, гармонически сопряженные соответственно с точками  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  по отношению к точкам  $A$  и  $B$ ,  $B$  и  $C$ ,  $C$  и  $A$ , то точки  $B'$ ,  $A'$ ,  $C_1$  коллинеарны; точно так же коллинеарны точки  $A'$ ,  $C'$ ,  $B_1$  и точки  $B'$ ,  $C'$ ,  $A_1$ .*

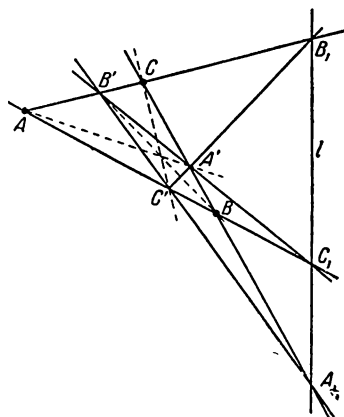
Для доказательства этой теоремы необходимо только заметить (фиг. 41), что

$$AB'SB_1 \overline{\wedge} BA'CA_1,$$

так как это две гармонические четверки точек (стр. 49). Поскольку при этом проективном соответствии точка  $C$  отвечает самой себе, это соответствие будет перспективным (стр. 51). Отсюда следует, что прямые  $AB$ ,  $A'B'$ ,  $B_1A_1$  схо-

дятся в одной точке. Но это означает, что точки  $B'$ ,  $A'$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой. Подобные же рассуждения применимы и к другим тройкам точек.

Если мы применим эту теорему к частному случаю, когда  $l$  есть бесконечно удаленная прямая, то точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , по определению, будут серединами сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно, и тогда теорема будет гласить, что прямые  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'A'$  параллельны соответственно прямым  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ . Иными словами, *прямая, соединяющая середины двух сторон треугольника, параллельна третьей его стороне.*



Ф и г. 41

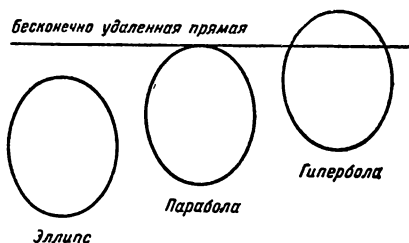
Пользуясь теми же обозначениями, читатель может самостоятельно доказать, что прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  сходятся в одной точке.

В том частном случае, когда  $l$  есть бесконечно удаленная прямая, это будет означать, что *медианы треугольника пересекаются в одной точке.*

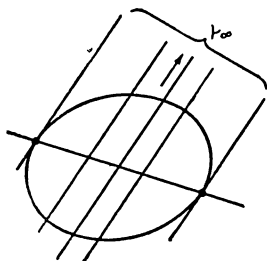
**32. Классификация конических сечений.** Если ограничиться, как мы это делали до сих пор, только „действительными“ точками, то можно сказать, что бесконечно удаленная прямая может либо пересекать коническое сечение в двух различных точках, либо касаться его, либо вовсе не иметь с ним общих точек. В соответствии с этим конические сечения классифицируются следующим образом: коническое сечение, пересекающее бесконечно удаленную прямую в двух различных точках, называется *гиперболой*; коническое сечение, касающееся бесконечно удаленной прямой, называется *параболой*; коническое сечение, не имеющее общих точек с бесконечно удаленной прямой, называется *эллипсом* (фиг. 42).

Укажем еще на следующие дополнительные определения.

Касательные к гиперболе в точках ее пересечения с бесконечно удаленной прямой называются *асимптотами*. Полус бесконечно удаленной прямой по отношению к коническому сечению называется *центром* конического сечения; прямые, проходящие через центр, называются *диаметрами* конического сечения. Конические сечения, центром которых служит собственная точка (не бесконечно удаленная), называются *центрными коническими сечениями* (эллипс и гипербола).



Фиг. 42



Фиг. 43

Необходимо отметить, что *каждый диаметр конического сечения есть поляр некоторой бесконечно удаленной точки относительно этого конического сечения* (стр. 78). Теперь мы можем сформулировать следующую теорему:

*Средины системы параллельных хорд конического сечения лежат все на диаметре  $d$ , который называют сопряженным с диаметром, параллельным этим хордам; если при этом существуют касательные к коническому сечению, параллельные рассматриваемым хордам, то диаметр  $d$  проходит через точки их касания с коническим сечением\** (фиг. 43).

\* Так называемая мнимая ось гипербола служит сопряженным диаметром с действительной осью, но не существует касательной к гиперболе, параллельной действительной оси; вообще не существует касательной к гиперболе, параллельной сопряженному диаметру, если последний расположен внутри того угла, образованного асимптотами, внутри которого расположена действительная ось гипербола. (Прим. ред.)



Это — непосредственное следствие определения середины отрезка и теоремы, определяющей свойства поляры точки относительно конического сечения (стр. 79). Укажем еще следующие метрические теоремы о конических сечениях, легко получающиеся из данных выше определений и доказанных ранее проективных теорем о конических сечениях.

*Две (собственные) касательные к параболе не могут быть параллельны между собой.*

*Если параллелограмм вписан в коническое сечение, то касательные, проведенные в парах противоположных его вершин, параллельны между собой.*

*Если параллелограмм описан около конического сечения, то его диагонали пересекаются в центре и представляют собой сопряженные диаметры.*

*Если параллелограмм вписан в коническое сечение, то смежные его стороны параллельны сопряженным диаметрам.*

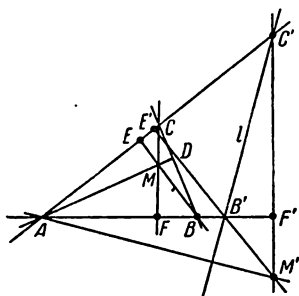
Читатель без труда докажет каждую из этих теорем, основываясь на уже знакомых ему теоремах проективной геометрии.

**33. Перпендикулярные прямые. Ортогональная инволюция.** Переходя к определению перпендикулярных прямых, мы будем исходить из известного предложения элементарной метрической геометрии о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. С помощью этого предложения мы докажем сначала следующую теорему:

*Каждая пара перпендикулярных прямых на плоскости пересекает бесконечно удаленную прямую в сопряженных точках одной и той же инволюции.*

Пусть  $ABC$  будет некоторый треугольник, и пусть  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  будут перпендикуляры, опущенные из его вершин на противоположные стороны. Согласно упомянутому выше предложению, все эти перпендикуляры пересекутся в точке  $M$  (фиг. 44). Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$  являются в таком случае вершинами полного четырехугольника; противоположные стороны его попарно пересекают бесконечно удаленную прямую в сопряженных точках некоторой инволюции  $I$  (стр. 59). Для того чтобы доказать, что любая другая пара взаимно перпендикулярных прямых  $l$  и  $l'$  той же плоскости пересекает бес-

конечно удаленную прямую в паре сопряженных точек той же самой инволюции, положим, что прямая  $l$  пересекает прямые  $AB$  и  $AC$  соответственно в точках  $B'$  и  $C'$ . (Мы можем, очевидно, полагать, что прямая  $l$  не содержит точки  $A$ ; в противном случае мы выбрали бы за прямую  $l$  другую прямую, параллельную  $l$  и не содержащую точки  $A$ .) Перпендикуляры  $B'E'$  и  $C'F'$ , опущенные из точек  $B'$  и  $C'$  на прямые  $AC$  и  $AB$ , параллельны соответственно прямым  $BE$  и  $CF$  и пересекаются в некоторой точке  $M'$ . Инволюция, определяемая на



Фиг. 44

бесконечно удаленной прямой парами противоположных сторон четырехугольника  $AB'C'M'$ , имеет две общие пары с инволюцией  $I$ , определяемой четырехугольником  $ABCM$ , и, следовательно, тождественна с инволюцией  $I$  (стр. 58). Отсюда следует, что прямая  $l$  и прямая  $AM'$ , перпендикулярная к прямой  $B'C' = l$ , пересекают бесконечно удаленную прямую в сопряженной паре точек инволюции  $I$ . Любая прямая  $l'$ , перпендикулярная прямой  $l$ , параллельна

прямой  $AM'$  и пересекает бесконечно удаленную прямую в той же точке, что и прямая  $AM'$ . Это доказывает нашу теорему.

При этом инволюция  $I$ , очевидно, есть инволюция эллиптическая; действительно, если бы она имела двойную точку, то прямая, которая проходила бы через эту точку, должна была бы быть перпендикулярна к самой себе, а такой (действительной) прямой не существует.

Применяя теперь второй метод подхода к метрическим свойствам, мы можем ввести следующие определения. Пусть  $I$  будет какая-то произвольно заданная эллиптическая инволюция на бесконечно удаленной прямой. Эту инволюцию  $I$  мы назовем *ортогональной* или *абсолютной инволюцией*. Две прямые мы будем называть *перпендикулярными*, если они проходят через сопряженные точки ортогональной инволюции.

Из этих определений непосредственно получаются следующие выводы:

Пары перпендикулярных друг к другу прямых в пучке прямых представляют собой сопряженные пары некоторой инволюции.

Инволюцию перпендикулярных прямых в пучке прямых мы будем называть *круговой инволюцией*\* этого пучка.

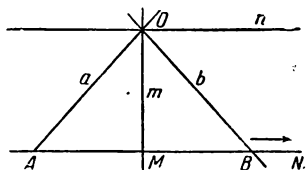
Через каждую точку плоскости проходит одна и только одна прямая, перпендикулярная данной прямой.

Прямая, перпендикулярная к одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна также и к другой из них.

Две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, параллельны между собой.

**34. Биссектрисы углов.** Если две перпендикулярные прямые образуют с двумя прямыми  $a$  и  $b$ , проходящими через точку их пересечения, гармоническую четверку, то говорят, что перпендикулярные прямые *делят пополам* углы, составленные прямыми  $a$  и  $b$ .

Что это определение действительно находится в согласии с знакомым нам определением биссектрисы, можно видеть из сле-



Фиг. 45

дующего. Пусть  $m$  и  $n$  будут две перпендикулярные прямые, и пусть некоторая прямая, перпендикулярная к прямой  $m$  и, следовательно, параллельная прямой  $n$ , пересекает прямые  $a$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $n$  в точках  $A$ ,  $B$ ,  $M$ ,  $N$ , причем последняя из этих точек есть бесконечно удаленная точка (фиг. 45). Так как пары прямых  $a$ ,  $b$  и  $m$ ,  $n$  образуют гармоническую четверку, то и пары точек  $A$ ,  $B$  и  $M$ ,  $N$  также образуют гармоническую четверку и, следовательно, точка  $M$  есть середина отрезка  $AB$  (стр. 84). Если  $O$  есть точка пересечения четырех заданных прямых, то треугольники  $АМО$  и  $ВМО$  конгруэнтны, а следовательно, угол  $АОМ$  равен углу  $ВОМ$ .

Если нам даны две прямые, проходящие через точку  $O$ , то при данном выше определении всегда существует одна и только одна пара биссектрис, ибо пары прямых, образу-

\* В русской литературе такую инволюцию часто называют ортогональной. (Прим. ред.)

щих гармонические четверки с двумя заданными прямыми, представляют собой сопряженные пары инволюции, для которой заданные прямые являются двойными. Эта инволюция и инволюция, определяемая перпендикулярными прямыми, проходящими через точку  $O$ , имеют общую сопряженную пару, так как круговая инволюция в точке  $O$  есть инволюция эллиптическая (стр. 63).

**35. Оси конического сечения.** Пары сопряженных диаметров центрального конического сечения образуют инволюцию прямых, проходящих через центр. *Эта инволюция имеет, вообще говоря, одну и только одну общую пару с круговой инволюцией в центре* (стр. 63). Если же в двух парах сопряженных диаметров диаметры эти взаимно перпендикулярны, то и каждые два сопряженных диаметра будут взаимно перпендикулярны, ибо в этом случае инволюция, определяемая сопряженными диаметрами, совпадает с круговой инволюцией в центре (стр. 58).

Коническое сечение, сопряженные диаметры которого образуют круговую инволюцию, называется *окружностью*. Если коническое сечение не есть окружность, то в этом случае существуют только два взаимно перпендикулярных сопряженных диаметра; эти диаметры называются *осями* конического сечения.

Хорды центрального конического сечения, перпендикулярные к одной из его осей, делятся этой осью пополам (стр. 88). Мы можем следующим образом сформулировать полученные результаты:

*Центральное коническое сечение, не являющееся окружностью, имеет одну и только одну пару осей. Коническое сечение симметрично относительно каждой из этих осей.*

Все диаметры параболы параллельны между собой. Один из этих диаметров отличается тем, что он делит пополам перпендикулярные к нему хорды. Этот диаметр называется *осью* параболы. Парабола имеет только одну ось; она симметрична относительно этой оси.

Асимптоты гиперболы представляют собой, очевидно, двойные прямые инволюции сопряженных диаметров. Отсюда следует, что *оси* гиперболы образуют с ее асимптотами гармоническую четверку и делят углы между асимптотами пополам.

**36. Фокусы конического сечения.** Если дано коническое сечение, то каждой прямой, лежащей в его плоскости, соответствует одна и только одна прямая, одновременно сопряженная с этой прямой относительно конического сечения и перпендикулярная к ней. Такие две прямые называются *сопряженными нормальными* по отношению к коническому сечению. В пучке прямых, проходящих через точку  $P$ , которая лежит в плоскости конического сечения, но не на нем самом, пары сопряженных прямых образуют инволюцию, содержащую по крайней мере две сопряженные прямые, перпендикулярные друг к другу (стр. 63); если эта инволюция содержит две пары перпендикулярных друг к другу сопряженных прямых, то и все остальные сопряженные пары будут состоять из прямых, перпендикулярных друг к другу (стр. 58). Если точка  $P$  лежит на коническом сечении, то ясно, что единственная пара сопряженных нормалей, проходящих через точку  $P$ , состоит из касательной к коническому сечению в точке  $P$  и прямой, проходящей через точку  $P$  перпендикулярно к этой касательной. Таким образом мы установили следующее:

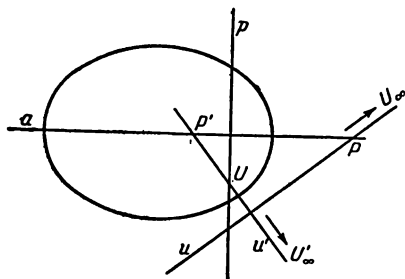
*Через каждую точку в плоскости конического сечения проходит по крайней мере одна пара сопряженных нормалей конического сечения; если через какую-либо точку проходят две пары сопряженных нормалей, то все пары сопряженных прямых, проходящих через эту точку, представляют собой сопряженные нормали.*

В связи с этим возникает вопрос, существуют ли в плоскости конического сечения такие точки, что каждая пара проходящих через эти точки сопряженных прямых будет представлять собой сопряженные нормали. Точка, обладающая этим свойством, называется *фокусом* конического сечения. Мы уже встречались с точкой такого рода для одного специального конического сечения, а именно, в случае окружности инволюция сопряженных прямых, проходящих через центр, совпадает с ортогональной инволюцией, и, следовательно, *центр окружности является ее фокусом*. Мало того, легко видеть, что центр окружности есть единственный ее фокус.

Исследуем теперь вопрос о существовании фокуса конического сечения, не представляющего собой окружности.

Положим, что точка  $F$  есть фокус. Если соединить точку  $F$  с центром  $O$  конического сечения (не исключена возможность того, что центр этот находится в бесконечности), то прямая  $OF$  будет представлять собой диаметр, полюс которого будет находиться в бесконечно удаленной точке прямой, проходящей через точку  $F$  и перпендикулярной к этому диаметру. Последний будет поэтому осью конического сечения. Таким образом, *каждый фокус конического сечения должен лежать на его оси*.

Положим, что  $a$  есть ось конического сечения и  $P$  — некоторая точка на ней (фиг. 46). Поляр  $p$  точки  $P$  будет,



Ф и г. 46

следовательно, перпендикулярна к прямой  $a$ . Пусть  $u$  будет переменная прямая, проходящая через точку  $P$ , и пусть  $U$  будет ее полюс; он лежит, разумеется, на прямой  $p$ . Пусть, далее,  $u'$  будет прямая, проходящая через точку  $U$  и перпендикулярная к прямой  $u$ ; точку ее пересечения с прямой  $a$

обозначим через  $P'$ . Покажем, прежде всего, что когда прямая  $u$  вращается около точки  $P$ , то точка  $P'$  остается неподвижной, т. е. прямая  $u'$  вращается около точки  $P'$ . Для этой цели заметим, что прямая  $u'$  проходит через бесконечно удаленную точку  $U''$ , сопряженную в ортогональной инволюции с бесконечно удаленной точкой  $U_\infty$  прямой  $u$ . Мы имеем, следовательно (стр. 79),

$$[U] \bar{\wedge} [u] \bar{\wedge} [U_\infty] \bar{\wedge} [U''_\infty];$$

значит, точки  $U$  и  $U''_\infty$  находятся в проективном соответствии. Прямые  $u'$  соединяют соответственные точки двух проективных рядов точек, один из которых лежит на прямой  $p$ , а другой — на бесконечно удаленной прямой. Чтобы доказать, что все прямые  $u'$  проходят через неподвижную точку, необходимо только показать, что рассматриваемое проективное соответствие будет перспективным, иначе говоря, что при

этом проективном соответствии бесконечно удаленная точка прямой  $p$  соответствует самой себе (стр. 51). Но, очевидно, когда точка  $U$  совпадает с бесконечно удаленной точкой прямой  $p$ , то прямая  $u$  совпадает с прямой  $a$ ; вместе с тем и точка  $U_\infty$  совпадает с бесконечно удаленной точкой прямой  $p$ . Все прямые  $u'$  проходят, следовательно, через неподвижную точку, лежащую на прямой  $a$ , так как прямая  $a$  есть одна из прямых  $u'$ ; это значит, что все прямые  $u'$  проходят через неподвижную точку  $P'$ .

Обратно, если бы мы отправлялись от прямой  $u'$  пучка прямых, проходящих через точку  $P'$ , то прямая  $u$  была бы сопряженной нормалью прямой  $u'$ , и мы получили бы точку  $P$ , как неподвижную точку, через которую проходили бы все прямые  $u$ ; иными словами, соответствие между точками  $P$  и  $P'$  оказывается взаимным. Мы должны теперь показать, что это соответствие — проективное и, следовательно, представляет собой инволюцию. В соответствии с этим положим, что точка  $P$  движется по прямой  $a$ . Согласно предшествующему, точка  $P'$  на прямой  $a$  определяется как точка пересечения с этой прямой сопряженной нормали некоторой прямой  $u$ , проходящей через точку  $P$  (и отличной от прямой  $a$ ). Мы можем поэтому принять за наши прямые  $u$  прямые пучка с центром в точке  $U_\infty$ , рассматриваемой как неподвижная точка бесконечно удаленной прямой; прямые этого пучка встречаются прямую  $a$  в точках  $P$ . Если мы обозначим через  $[u]$  пучок прямых с центром в точке  $U_\infty$ , через  $[U]$  — прямолинейный ряд точек, описываемый точкой  $U$  — полюсом прямой  $u$ , и через  $[u']$  — пучок прямых  $u'$  с центром в точке  $U'_\infty$ , сопряженной с точкой  $U_\infty$  в ортогональной инволюции, то будем иметь

$$[P] \overline{\wedge} [u] \overline{\wedge} [U] \overline{\wedge} [u'] \overline{\wedge} [P'];$$

это показывает, что соответствие между рядами точек  $P$  и  $P'$  есть соответствие проективное. Оно представляет собой, следовательно, обыкновенную инволюцию на оси конического сечения, определяемую парами точек, в которых пары сопряженных нормалей пересекают рассматриваемую ось. Определенную таким образом инволюцию на оси  $a$  мы будем обозначать через  $\Gamma_a$ .

Фокус  $F$ , лежащий на оси  $a$ , должен, очевидно, быть двойной точкой инволюции  $I_a^*$ ; и обратно, каждая двойная точка инволюции  $I_a$  представляет собой фокус конического сечения, лежащий на оси  $a$ . Таким образом, поставленный нами вопрос о существовании фокусов конического сечения сводится непосредственно к вопросу, будут ли инволюции  $I_a, I_b$  на осях центрального конического сечения, или инволюция  $I_a$  на оси параболы, гиперболическими или эллиптическими\*\*.

Для параболы двойной точкой инволюции  $I_a$  будет, очевидно, бесконечно удаленная точка на оси. В самом деле, в этом случае бесконечно удаленная прямая есть касательная к коническому сечению; если  $U_\infty$  есть точка касания бесконечно удаленной прямой, то каждая прямая, проходящая через точку  $U_\infty$ , образует с бесконечно удаленной прямой сопряженную пару, которая проходит также через сопряженную пару ортогональной инволюции. Инволюция  $I_a$  есть поэтому инволюция гиперболическая и, следовательно, должна иметь еще одну двойную точку. Отсюда следует, что *парабола имеет единственный (собственный) фокус, лежащий на ее оси.*

В случае, когда речь идет о центральном коническом сечении (эллипсе или гиперболе), дело обстоит не столь просто. Фактически при этом одна из инволюций  $I_a, I_b$  будет всегда гиперболической, а другая — эллиптической. Строгое доказательство этого будет вскоре дано. Читатель может, однако, уже сейчас убедиться в этом с помощью следующих соображений. Центр конического сечения образует, очевидно, с бесконечно удаленной точкой каждой из его осей сопряженную пару инволюции  $I_a$  или  $I_b$  соответственно. Если инволюция

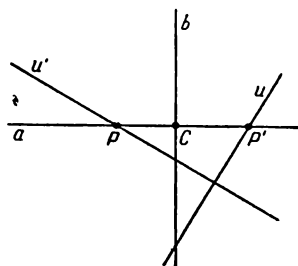
---

\* Чтобы построить точку  $F'$ , сопряженную с какой-либо точкой  $F$  оси  $a$  в инволюции  $I_a$ , нужно через  $F$  провести произвольную прямую  $f$ ; сопряженная с ней ~~прямая~~  $f'$  встретит ось в точке  $F'$ . Но если  $F$  есть фокус конического сечения, то прямая  $f'$  всегда пройдет через точку  $F$ , которая поэтому есть двойная точка инволюции  $I_a$ . (Прим. ред.)

\*\* В тексте показано, что фокус  $F$ , если он существует, является двойной точкой инволюции  $I_a$ , и обратно. Вопрос о существовании фокуса  $F$  зависит поэтому от того, существует или нет двойная точка инволюции  $I_a$ , т. е. есть ли это гиперболическая или эллиптическая инволюция. (Прим. ред.)



на одной из осей, скажем на оси  $a$ , будет эллиптической, то точки любой другой сопряженной пары инволюции  $I_a$  должны лежать по разные стороны от точки  $C$ , так как любые две сопряженные пары точек эллиптической инволюции разделяют одна другую. Из рассмотрения фиг. 47 ясно, что любая пара сопряженных нормалей  $u$  и  $u'$ , пересекающая прямую  $a$  в двух точках, расположенных по разные стороны от точки  $C$ , должна пересекать прямую  $b$  в двух точках, расположенных по одну и ту же сторону от точки  $C$ . Эта последняя пара точек и пара, состоящая из точки  $C$  и бесконечно удаленной точки прямой  $b$ , не разделяют, следовательно, одна другую, и, значит, инволюция  $I_b$  есть инволюция гиперболическая. Обратно, если бы мы предположили, что инволюция  $I_a$  есть инволюция гиперболическая, то с помощью подобных же соображений убедились бы, что инволюция  $I_b$  должна быть в этом случае эллиптической.



Ф и г. 47

Мы заключаем отсюда, что *каждое центральное коническое сечение (не являющееся окружностью) имеет два и только два (действительных) фокуса, причем оба они расположены на одной из осей конического сечения*. Ось, содержащая фокусы, называется *главной осью* конического сечения.

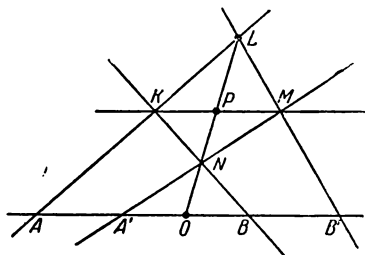
Так как любая пара сопряженных нормалей конического сечения пересекает главную его ось в паре точек инволюции, двойными точками которой служат фокусы конического сечения, то пара сопряженных нормалей, проходящих через точку  $P$  в плоскости конического сечения, образует гармоническую четверку с прямыми, соединяющими точку  $P$  с его фокусами (стр. 58); иными словами, *каждая пара сопряженных нормалей (относительно конического сечения) делит пополам углы, образованные прямыми, соединяющими точку их пересечения с фокусами конического сечения* (стр. 91).

В частности, *касательная и нормаль к коническому сечению в точке  $P$  делят пополам углы, образуемые прямыми, соединяющими точку  $P$  с фокусами конического сечения*.

Для параболы, один из фокусов которой находится в бесконечности, полученный результат будет гласить: *касательная и нормаль к параболе в точке  $P$  делят пополам углы, которые образуются прямой, соединяющей точку  $P$  с фокусом параболы, и прямой, проходящей через точку  $P$  и параллельной оси параболы.*

В заключение настоящего раздела заметим, что предшествующие рассуждения неприменимы к окружности. В последнем случае оба фокуса совпадают с центром, и инволюции  $I_a$  и  $I_b$  вырождаются.

**37. Метрические свойства инволюции.** Нам представляется целесообразным с этого момента окончательно оставить второй метод подхода к изучению метрических соотношений, описанный на стр. 83, и применять в остающейся части настоящей главы первый метод, предполагающий предварительное знание элементарной эвклидовой геометрии. Он даст нам возможность получить некоторые дополнительные важные свойства, установление которых чисто проективным путем потребовало бы обстоятельной подготовки и предъявило бы значительно более высокие требования к уровню знаний читателя.



Фиг. 48

Мы начнем с рассмотрения некоторых основных метрических соотношений в инволюции точек на прямой. Точка, сопряженная в данной инволюции с бесконечно удаленной точкой прямой, называется *центром* этой инволюции. Если инволюция имеет двойные точки, то каждая пара сопряженных точек инволюции образует с ними гармоническую четверку (стр. 58). Отсюда следует, что *центр инволюции делит пополам отрезок, соединяющий ее двойные точки, если таковые существуют.*

Пусть теперь  $A, A'$  и  $B, B'$  будут две сопряженные пары точек некоторой инволюции на прямой; построим центр  $O$  этой инволюции с помощью полного четырехугольника  $KLMN$ , как это показано на фиг. 48. Предположим, что прямая  $KM$

параллельна прямой  $AA'$ ; пусть  $P$  — точка пересечения прямых  $KM$  и  $LN$ . Треугольники  $LOB'$  и  $LPM$  подобны, следовательно,

$$OB':PM=LO:LP;$$

точно так же из подобия треугольников  $NOB$  и  $NPK$  получаем

$$OB:PK=NO:NP.$$

Перемножая эти соотношения, получим

$$(OB \cdot OB'):(PK \cdot PM)=(LO \cdot NO):(LP \cdot NP).$$

Подобным же образом из рассмотрения треугольников  $LOA$ ,  $LPK$  и  $NOA'$ ,  $NPM$  получим

$$(OA \cdot OA'):(PK \cdot PM)=(LO \cdot NO):(LP \cdot NP).$$

Отсюда сейчас же следует, что

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = \text{const.}$$

Это основное соотношение, которое в некоторых сочинениях по проективной геометрии принимается за определение инволюции, может быть сформулировано следующим образом:

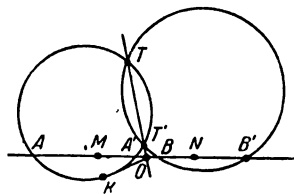
*Произведение расстояний центра инволюции до двух сопряженных ее точек есть величина постоянная.*

Если точки  $A$  и  $A'$  расположены по одну и ту же сторону от центра  $O$  (как на фиг. 48), то отрезки  $OA$  и  $OA'$  будут иметь одинаковое направление и, следовательно, произведение  $OA \cdot OA'$  будет иметь положительное значение; если же точки пары  $A$  и  $A'$  расположены по разные стороны от точки  $O$ , то произведение  $OA \cdot OA'$  будет отрицательным, и это, очевидно, будет иметь место для любой сопряженной пары данной инволюции. В самом деле, если  $U_\infty$  есть бесконечно удаленная точка на прямой, то каждая пара данной инволюции разделяет или не разделяет пару  $O$ ,  $U_\infty$ , в зависимости от того, будет ли инволюция эллиптической или гиперболической (стр. 59). Это вновь подтверждает полученный выше результат относительно существования двойных точек инволюции. Если  $M$  есть двойная точка инволюции, то полученное нами соотношение превращается в равенство  $\overline{OM}^2 = OA \cdot OA'$ , а последнее имеет (действительное) решение  $OM$  в том и

только в том случае, если произведение  $OA \cdot OA'$  будет положительным, т. е. если две пары сопряженных точек не разделяют друг друга.

### 38. Построение инволюции с помощью окружностей.

Соотношение, полученное в предыдущем параграфе, дает еще один способ построения пар точек инволюции по двум заданным парам  $A, A'$  и  $B, B'$ . Проводим через точки  $A$  и  $A'$  одну окружность, через точки  $B$  и  $B'$  — другую так, что она пересекает первую окружность в точках  $T$  и  $T'$ . Если  $O$  есть точка пересечения секущей  $TT'$  с прямой инволюции, то, согласно известному предло-



Фиг. 49

жению планиметрии, имеем (фиг. 49)

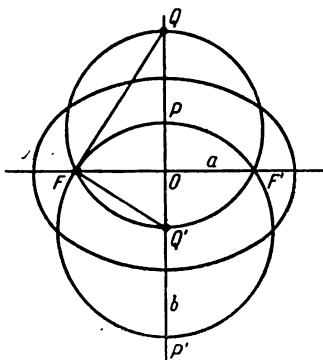
$$OA \cdot OA' = OT \cdot OT' = OB \cdot OB'.$$

Но это соотношение показывает, что точка  $O$  служит центром инволюции и что любая другая окружность, проходящая через точки  $T$  и  $T'$  и пересекающая прямую инволюции, пересекает последнюю в сопряженной паре точек этой инволюции.

Чтобы найти двойные точки инволюции, необходимо только провести из центра инволюции  $O$  касательную к одной из этих окружностей. Если  $K$  есть точка касания, то  $\overline{OK}^2 = OT \cdot OT'$ . Две точки  $M$  и  $N$ , расположенные по разные стороны от точки  $O$  на расстоянии от нее, равном  $OK$ , и будут тогда двойными точками инволюции. Читатель должен заметить, что если пары точек  $A, A'$  и  $B, B'$  разделяют одна другую, то центр  $O$  necessarily будет лежать внутри любой окружности, проходящей через точки  $T$  и  $T'$ , и, следовательно, провести касательную из точки  $O$  к какой-либо из этих окружностей будет невозможно. Но это вполне естественно, так как в этом случае инволюция будет эллиптической.

**39. Построение фокусов центрального конического сечения.** Вернемся теперь к рассмотрению фокусов централь-

ного конического сечения. Мы видели (стр. 95), что пары сопряженных нормалей пересекают оси  $a$  и  $b$  конического сечения в парах точек двух инволюций  $I_a$  и  $I_b$ . Если какая-либо из этих двух инволюций имеет двойные точки, то они являются фокусами конического сечения. Если одна из упомянутых инволюций, скажем инволюция  $I_a$ , будет гиперболической, с двойными точками  $F$  и  $F'$ , то другая инволюция  $I_b$  должна быть эллиптической. В самом деле, пары сопряженных нормалей в точке  $F$  образуют круговую инволюцию, которая является эллиптической, и эти пары сопряженных нормалей пересекают ось  $b$  в парах точек инволюции  $I_b$ . Мы знаем, что по крайней мере одна из двух инволюций  $I_a$ ,  $I_b$  является эллиптической. Пусть это будет инволюция  $I_b$  и пусть  $P$ ,  $P'$  и  $Q$ ,  $Q'$  будут две пары сопряженных ее точек (которые, по предположению, разделяют одна другую). Проведем две окружности с диаметрами  $PP'$  и  $QQ'$ . Эти окружности пересекутся в точках  $F$  и  $F'$ , и так как прямая  $FF'$  пересекает ось  $b$  в центре инволюции  $I_b$ , а этот центр является в то же время и центром конического сечения, то прямая  $FF'$  должна представлять собой вторую ось. Более того, прямые  $FQ$  и  $FQ'$  суть сопряженные нормали, так как угол  $QFQ'$  вписан в полуокружность, а эти прямые проходят соответственно через точки  $Q$  и  $Q'$ . То же самое можно сказать и про прямые  $FP$  и  $FP'$  и про любые две прямые, соединяющие какую-либо пару точек инволюции  $I_b$ . Точки  $F$  и  $F'$  являются поэтому фокусами конического сечения.



Ф и г. 50

#### 40. Метрические определения конического сечения.

Теперь мы можем доказать хорошо известные свойства конических сечений, на которые опираются определения этих кривых в том виде, как они даются в элементарной аналитической геометрии. Мы начнем со следующего определения.



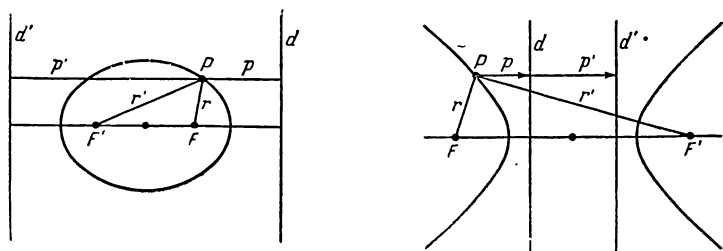
$CFA$  и  $CFB$  равны между собой. Но это означает, что треугольники  $FAM$  и  $FBN$  подобны, и, следовательно, взяв соответствующие стороны, получим следующую пропорцию:

$$FA:AM=FB:BN.$$

Если через точки  $A$  и  $B$  провести прямые  $AA'$  и  $BB'$ , перпендикулярные к директрисе, то пропорция примет вид

$$FA:AA'=FB:BB'.$$

Это и есть одно из тех свойств, на которые мы ссылались вначале как на свойство, которое часто служит для опреде-



Ф и г. 52

ления конического сечения: *отношение расстояния любой точки конического сечения от его фокуса к расстоянию этой точки от соответствующей директрисы есть величина постоянная*. Это отношение называется *эксцентриситетом* конического сечения. Эллипс и гипербола имеют по два фокуса и две директрисы. Само собой разумеется, что эксцентриситет  $e$  будет один и тот же для обоих фокусов и соответствующих им директрис, так как эти кривые симметричны относительно каждой из своих осей (стр. 92). Пусть  $r$ ,  $r'$  суть так называемые *фокальные радиусы* точки  $P$  эллипса или гиперболы, т. е. расстояния точки  $P$  от фокусов  $F$  и  $F'$  соответственно, и пусть  $p$ ,  $p'$  будут расстояния точки  $P$  от соответствующих директрис. Только что полученное соотношение дает нам  $r=ep$  и  $r'=ep'$ , откуда мы получаем  $r+r'=e(p+p')$  и  $r-r'=e(p-p')$ . В случае эллипса сумма  $p+p'$  — расстояние между его директрисами — есть величина постоянная; на том же основании для гиперболы

болы постоянной будет разность  $p - p'$ . Отсюда следует, что *в эллипсе сумма расстояний любой его точки от его фокусов есть величина постоянная; в гиперболе разность расстояний любой ее точки от ее фокусов есть величина постоянная.*

Это и есть второе из тех свойств, о которых мы упоминали как о свойствах, которыми часто пользуются для определения эллипса и гиперболы. Таким образом, кривые, которые мы определили в гл. V как конические сечения при помощи чисто проективных средств, оказались тождественными с кривыми, известными под этим названием в метрической геометрии\*.

---

\* Строго говоря, следовало бы еще показать, что и *параболы* можно получить как частный случай рассмотренных в гл. V конических сечений при помощи специальных допущений. Это доказательство читатель сможет провести самостоятельно. (Прим. ред.)



## Г Л А В А VII

### ГРУППЫ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

**41. Символическое представление соответствий.** В предшествующих главах мы дали систематическое и вполне элементарное изложение значительной части проективной геометрии. Изложив в предыдущей главе некоторые из метрических соотношений, к которым приводит проективная геометрия, мы вернемся сейчас к чисто проективной точке зрения, развитой в гл. III, IV и V. В остающихся главах мы намерены изложить некоторые из более общих соображений, которые связаны с нашим предметом. В дальнейшем наше изложение будет менее систематическим, так как оно больше имеет в виду дать изложение результатов, методов и точек зрения, чем всех деталей доказательств. По этой причине, а также вследствие того, что мы будем иметь дело с более глубокими математическими фактами, читатель может найти, что следующие главы предъявляют несколько более высокие требования к его подготовке и математической культуре.

Проективные преобразования между двумя прямолинейными рядами точек или между двумя пучками прямых, перспективное соответствие между точками и прямыми двух плоскостей, которые мы имели случай вкратце рассмотреть в гл. III, представляли собой примеры более общего понятия о взаимно однозначных соответствиях или преобразованиях. Здесь нам будет полезно ознакомиться с символическим методом, который применяется при изучении такого рода соответствий. Положим, что нам дана некоторая система  $S$  элементов (например, точки, прямые или и точки и прямые на плоскости) и что между элементами системы  $S$  и элементами некоторой другой системы  $S'$  установлено взаимно однозначное соответствие; это соответствие или преобразование будем обозначать через  $T$ . Мы будем при этом говорить, что соответствие  $T$  преобразует систему  $S$  в систему  $S'$ , и записывать это

обстоятельство следующим образом:  $T(S) = S'$ . Если  $a$  есть некоторый элемент  $S$ , то  $T(a)$  является соответствующим элементом системы  $S'$ .

Положим, что мы применили к системе  $S$  последовательно два преобразования  $T_1$  и  $T_2$ , так что  $T_1(S) = S'$  и  $T_2(S') = S''$ ; преобразование, непосредственно преобразующее систему  $S$  в систему  $S''$ , мы будем называть результатом последовательного применения преобразований  $T_1$  и  $T_2$  или *произведением преобразований  $T_1$  и  $T_2$* , выполненных в указанном порядке, и будем его обозначать символом  $T_2 T_1$ . Это обозначение естественно вытекает из записи  $S'' = T_2(S') = T_2[T_1(S)] = T_2 T_1(S)$ . Подобным же образом для последовательности более чем двух преобразований символ  $T_n \dots T_2 T_1$  будет обозначать результат последовательного применения преобразований  $T_1, T_2, \dots, T_n$  в указанном порядке. Порядок, в котором производятся преобразования, имеет существенное значение. Вообще говоря, преобразование  $T_1 T_2$  не совпадает с преобразованием  $T_2 T_1$ . Если же  $T_2 T_1 = T_1 T_2$ , то эти два преобразования носят название *коммутативных*. Например, два проективных преобразования на прямой, вообще говоря, не будут коммутативными. Но если два проективных преобразования на прямой имеют одни и те же двойные точки, то они, как мы вскоре увидим, являются коммутативными.

Если преобразование  $T$  преобразует систему  $S$  в систему  $S'$ , то преобразование, которое преобразует систему  $S'$  в систему  $S$ , называется *обратным* по отношению к  $T$  и обозначается символом  $T^{-1}$ ; это означает, что из соотношения  $T(S) = S'$  следует соотношение  $T^{-1}(S') = S$ . Произведение преобразования на обратное ему оставляет каждый элемент неизменным. Такое преобразование называется *тождественным преобразованием* или просто *тождеством* и обозначается символом 1. Мы имеем, следовательно, соотношения

$$TT^{-1} = T^{-1}T = 1; \quad 1T = T1 = T. *$$

Легко видеть, что произведение трех преобразований  $T_1, T_2, T_3$  всегда удовлетворяет так называемому ассоциативному

---

\* Тождественное преобразование в настоящее время обычно обозначают не 1, а специальной буквой, например  $I$ , так что предыдущие равенства пишут так:  $TI^{-1} = T^{-1}T = I$ ;  $IT = TI = T$ . (Прим. ред.)

закону:  $(T_3 T_2) T_1 = T_3 (T_2 T_1)$ . Поэтому в произведении преобразований мы можем вводить или переносить скобки как нам угодно, при условии, что порядок преобразований остается неизменным, и можем в этом произведении заменить любое преобразование равным ему произведению преобразований. В частности, преобразование, обратное произведению преобразований  $T_2, T_1$ , есть  $T_1^{-1} T_2^{-1}$ , так как очевидно, что  $(T_2 T_1) (T_1^{-1} T_2^{-1}) = T_2 (T_1 T_1^{-1}) T_2^{-1} = T_2 T_2^{-1} = 1$ .

Результат преобразования  $T$ , повторенного  $n$  раз,  $TTT \dots T$ , обозначается через  $T^n$ . Если для некоторого значения числа  $n$  имеет место тождество  $T^n = 1$ , то наименьшее значение числа  $n$ , для которого оно имеет место, называется *порядком* или *периодом* преобразования  $T$ , а само преобразование  $T$  называется *преобразованием конечного порядка* или *периодическим*\*. Преобразование с периодом 2, т. е. преобразование  $T (\neq 1)$ , для которого  $T^2 = 1$ , называется *инволютивным*. Каждое инволютивное преобразование обратно самому себе:  $T^{-1} = T$ . Инволюция на прямой, определение которой было нами дано на стр. 58, представляет собой пример инволютивного преобразования.

**42. Понятие о группе преобразований.** Совокупность взаимно однозначных преобразований, обладающая теми свойствами, что преобразование, обратное каждому из преобразований этой совокупности, принадлежит этой же совокупности и что произведение любых двух ее преобразований также есть преобразование этой совокупности, называется *группой преобразований*.

Из определения проективного преобразования тотчас следует, что преобразование, обратное ему, будет также проективным преобразованием; точно так же произведение любых двух проективных преобразований есть проективное преобразование. Поэтому совокупность всех возможных проективных преобразований (включая, конечно, и тождественное преобразование) образует группу. Она известна под названием *общей проективной группы прямой*.

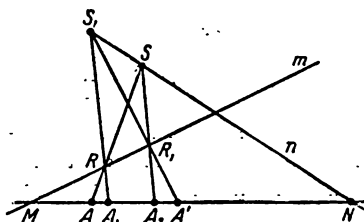
Если преобразование  $T$  переводит каждый элемент некоторой фигуры в элемент той же фигуры, то эта фигура

\* В русской литературе такое преобразование иногда называют *циклическим преобразованием порядка  $n$* . (Прим. ред.)

называется *инвариантной* по отношению к преобразованию  $T$ . Отсюда ясно, что *совокупность тех преобразований данной группы, которые оставляют инвариантной некоторую фигуру, образует группу*, так называемую *подгруппу* данной группы. Так, например, совокупность всех проективных преобразований прямой, которые оставляют инвариантной какую-либо определенную точку прямой, образует группу — подгруппу общей проективной группы прямой. Точно так же совокупность всех проективных преобразований прямой, которые оставляют неизменными две различные точки (каждую в отдельности), т. е. имеют две заданные точки своими двойными точками, образует группу.

Если любые два преобразования группы коммутативны, то такая группа называется *коммутативной*. В следующем параграфе мы покажем, что последняя из указанных групп является группой именно такого рода.

**43. Две важные группы проективных преобразований прямой.** Пусть  $M$  и  $N$  будут две заданные различные точки



Ф и г. 53

прямой; будем рассматривать совокупность всех проективных преобразований прямой, для которых эти точки являются двойными. Выше мы видели, что эта совокупность проективных преобразований образует группу. Более того, согласно основной теореме проективной геометрии, в этой

группе существует одно и только одно преобразование, переводящее заданную точку  $A$ , отличную от  $M$  и  $N$ , в другую точку  $A_1$  прямой. В силу этого ее свойства группа называется *одно-транзитивной*. Эта группа коммутативна, как это видно из следующих соображений. На прилагаемом чертеже (фиг. 53) мы воспользовались обычным построением (стр. 55—6) для установления проективного преобразования с двумя двойными точками  $M$  и  $N$ ; обозначим через  $T_1$  преобразование нашей группы, переводящее точку  $A$  в точку  $A_1$ , и именно таким образом:

$$A \xrightarrow{S} R \xrightarrow{S_1} A_1;$$

далее, через  $T_2$  обозначим преобразование, переводящее точку  $A$  в точку  $A_2$  таким образом, что

$$A \xrightarrow{R} S \xrightarrow{R_1} A_2.$$

Из фиг. 53 легко усмотреть, что преобразование  $T_2$  переводит точку  $A_1$  в точку  $A' (A_1 \xrightarrow{R} S_1 \xrightarrow{R_1} A')$ , преобразование  $T_1$  переводит точку  $A_2$  в ту же самую точку  $A' (A_2 \xrightarrow{S} R_1 \xrightarrow{S_1} A')$ . Таким образом, оба преобразования  $T_2 T_1$  и  $T_1 T_2$  переводят точку  $A$  в  $A'$ , и поскольку каждое преобразование нашей группы полностью определяется одной парой соответственных элементов, отличных от двойных точек, то отсюда следует, что  $T_2 T_1 = T_1 T_2$ . Соображения эти могут быть объединены следующим образом:

(1) Совокупность всех гиперболических проективных преобразований на прямой, имеющих общие двойные точки, образует (вместе с тождественным преобразованием) однотранзитивную коммутативную группу\*.

Существует еще одна группа проективных преобразований, важное значение которой будет показано ниже, а именно, следующая:

(2) Совокупность всех параболических проективных преобразований на прямой, имеющих общую двойную точку, образует (вместе с тождественным преобразованием) однотранзитивную коммутативную группу.

Читатель может подумать, что это просто особый случай предыдущего предложения, а именно, тот, когда две двойные точки совпадают. Однако необходимо еще показать, что произведение двух параболических преобразований также будет снова параболическим. Пусть  $T_1$  и  $T_2$  будут два таких проективных преобразования, и допустим, что преобразование

---

\* Ввиду того, что в совокупности рассматриваемых преобразований содержится лишь одно преобразование, которое переводит данную точку прямой в другую произвольно заданную точку, ее называют одно-транзитивной группой, в отличие от таких групп, которые дают возможность перевести в любую другую точку, но при этом оставляют возможным дальнейший произвол. (Прим. ред.)

$T_2 T_1$  имеет вторую двойную точку  $N (\neq M)$ . Если  $T_1$  преобразует точку  $N$  в точку  $N'$ , отличную от точки  $N$ , то  $T_2$  должно преобразовать точку  $N'$  в  $N$ . Но это означает, что  $T_2$  есть преобразование, обратное  $T_1$ , и, следовательно,  $T_2 T_1 = 1$ . Произведение двух преобразований нашей совокупности будет, таким образом, параболическим, если только оно не обращается в тождество. (Когда мы говорим о совокупности параболических преобразований, имеющих данную двойную точку, то мы включаем в эту совокупность и тождество. Всякая группа, разумеется, должна содержать тождественное преобразование.)

То, что группа параболических преобразований коммутативна, может рассматриваться как следствие предыдущего доказательства в том частном случае, когда точки  $M$  и  $N$  совпадают. Читатель, тем не менее, быть может, найдет для себя интересным дать независимое доказательство этого. Дело в том, что доказательство предложения (1) необходимо опирается на основную теорему проективной геометрии на прямой; для случая же параболических преобразований оно может быть проведено целиком на основании теоремы о ряде точек, порождаемом полным четырехугольником (стр. 40), не пользуясь основной теоремой.

Обе эти группы будут играть основную роль в ближайшей главе в связи с введением в проективную геометрию аналитических методов, свободных от каких-либо метрических соображений.

**44. Преобразование соответствий.** Положим, что мы имеем соответствие  $T$ , преобразующее систему  $S$  в  $S'$ , и другое преобразование  $T_1$ , которое преобразует  $S$  в  $S_1$  и  $S'$  в  $S'_1$ . Тогда преобразование  $T_1 T T_1^{-1}$  преобразует систему  $S_1$  в  $S'_1$ . Соответствие, устанавливаемое преобразованием  $T_1 T T_1^{-1}$ , рассматривается как результат преобразования соответствия  $T$  при помощи  $T_1$ .

Положим, например, что  $T$  есть некоторое проективное соответствие на прямой  $u$  и что другое проективное же соответствие  $T_1$  преобразует точки прямой  $u$  в точки другой (или той же самой) прямой  $u_1$ . Тогда  $T_1 T T_1^{-1}$  представляет собой проективное соответствие на прямой  $u_1$ ; при этом если  $P, P'$

суть две соответственные точки прямой  $u$  в преобразовании  $T$ , а  $T_1$  переводит точки  $P$  и  $P'$  соответственно в точки  $P_1$  и  $P'_1$ , то последние будут соответственными в преобразовании  $T_1 T T_1^{-1}$ . В частности, если  $M$  есть двойная точка преобразования  $T$  и  $T_1(M) = M_1$ , то  $M_1$  будет двойной точкой преобразования  $T_1 T T_1^{-1}$ . Отсюда следует, что в результате такого преобразования всякое гиперболическое проективное преобразование переходит в гиперболическое же, эллиптическое — в эллиптическое, параболическое — в параболическое.

Проективное преобразование  $T_1$  преобразует соответствие  $T$  в самое себя в том и только в том случае, если  $T$  и  $T_1$  коммутативны, ибо из равенства  $T_1 T T_1^{-1} = T$  следует соотношение  $T T_1 = T_1 T$ . Легко видеть, что проективное преобразование  $T_1$  переводит группу проективных соответствий в такую совокупность, которая, в свою очередь, образует группу. Если  $T_1$  преобразует группу  $G$  в группу  $G_1$ , то мы будем писать  $T_1 G T_1^{-1} = G_1$ . Если  $G_1 = G$ , то говорят, что  $T_1$  преобразует группу  $G$  в самое себя или что группа  $G$  инвариантна относительно преобразования  $T_1$ . Если каждое преобразование группы  $G_1$  преобразует группу  $G$  в самое себя, то говорят, что группа  $G_1$  преобразует группу  $G$  в самое себя или что группа  $G$  инвариантна относительно группы  $G_1$ . Из предыдущего легко видеть, что группа всех гиперболических проективностей на прямой с двойными точками  $M$  и  $N$  преобразует в самое себя группу всех параболических проективностей на прямой с двойной точкой  $M$ .

**45. Проективные соответствия в образах второй ступени\*.** До сих пор мы уделяли очень мало внимания проективным соответствиям между элементами образов второй и третьей ступени. Мы имели случай (стр. 26) только коротко рассмотреть так называемое перспективное соответствие между

---

\* Образы второй ступени суть образы двумерные; такова плоскость как совокупность точек, или плоскость как совокупность прямых, проходящих через одну точку, совокупность точек поверхности второго порядка, или совокупность плоскостей, касающихся поверхности второго порядка. Образ третьей ступени — это трехмерное пространство как совокупность точек или совокупность плоскостей. (Прим. ред.)

двумя плоскостями. Оно представляет собой частный случай следующего определения:

*Проективное соответствие* между элементами двух образов второй (или двух образов третьей) степени есть такое взаимно однозначное соответствие между элементами обоих образов, при котором каждому образу первой степени первого из них соответствует проективный ему образ второго.

В качестве типичного образа второй степени мы возьмем *плоское поле*, т. е. совокупность всех точек и прямых плоскости. Если каждой точке одной плоскости соответствует точка другой (или той же самой) плоскости и если это соответствие будет проективным в смысле данного выше определения, то каждой прямой первой плоскости будет соответствовать прямая второй плоскости, каждому прямолинейному ряду точек первой плоскости будет соответствовать проективный ему прямолинейный ряд точек второй плоскости и каждому пучку прямых первой плоскости будет соответствовать проективный ему пучок прямых второй плоскости. Рассмотренное нами ранее (стр. 26) перспективное соответствие между двумя плоскостями удовлетворяет, очевидно, этим условиям. Более того, результат любой последовательности таких перспективных соответствий, очевидно, также удовлетворяет этим условиям. Соответствия такого рода, какие мы рассматривали до сих пор, когда каждому элементу одного образа соответствовал такого же рода элемент другого образа, т. е. точке — точка и прямой — прямая, называются *коллинеациями*, и если при этом соответствие проективно, то оно называется *проективной коллинеацией*. Если мы ограничимся обыкновенным *действительным* пространством, то всякая коллинеация необходимо будет проективной (хотя это не будет иметь места, если рассматривать также и мнимые элементы). Можно показать, что любая проективная коллинеация может быть получена как результат (некоторой) последовательности перспективных преобразований. В дальнейшем, когда мы будем пользоваться термином коллинеация, мы будем иметь в виду проективную коллинеацию\*.

\* Коллинеацией чаще называют такое однозначное точечное соответствие плоскости с самой собой или с другой плоскостью, или пространства с самим собой, при котором точки, расположенные на одной прямой, всегда переходят в точки, также расположен-



Если, с другой стороны, имеется проективное соответствие, в котором каждой точке одной плоскости соответствует прямая другой плоскости и каждой прямой одной плоскости соответствует точка другой, то такое соответствие называется *корреляцией*. Мы имели пример такой корреляции (в которой обе плоскости совпадали) в системе полюсов и поляр конического сечения (стр. 78). В системе взаимных поляр каждому прямолинейному ряду точек соответствует проективный ему пучок прямых, и обратно.

Обе плоскости, между которыми установлено соответствие с помощью коллинеации или корреляции, могут, конечно, совпадать. В этом случае мы имеем коллинеацию или корреляцию на плоскости. Коллинеация, обратная любой коллинеации на плоскости, а также произведение двух коллинеаций на плоскости, тоже представляет собой, очевидно, коллинеацию на той же плоскости. Совокупность всех возможных коллинеаций (включая и тождественную коллинеацию) образует поэтому так называемую *общую группу коллинеаций на плоскости*. Напротив, произведение двух корреляций на плоскости представляет собой коллинеацию. Поэтому совокупность всех корреляций на плоскости не образует группы. Но совокупность всех корреляций и коллинеаций на плоскости образует группу.

Основная теорема проективной геометрии устанавливает, что проективное соответствие между двумя прямыми полностью определяется заданием трех пар соответственных точек. Соответствующая теорема для коллинеации между двумя плоскостями гласит:

*Проективная коллинеация между двумя плоскостями (или на одной и той же плоскости) вполне определяется*

*ныне на одной прямой. Иными словами, коллинеация есть точечное преобразование плоскости или пространства, которое всякую прямую переводит в прямую же. При этом понимании коллинеации возникает серьезный вопрос, всякая ли коллинеация является проективным преобразованием. Это предложение можно считать обратным той теореме, что всякое проективное преобразование представляет собой коллинеацию. Оно может быть доказано геометрически и аналитически; аналитическое доказательство составляет содержание § 6 сочинения В. Ф. Кагана, Основы теории поверхностей, ГТТИ, М.—Л., 1947. Геометрическое доказательство см., например, в книге Ф. Клейна, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. II, стр. 152, ГТТИ, М.—Л., 1934. (Прим. ред.)*

*заданием четырех пар соответственных точек при условии, что никакие три точки каждой четверки не лежат на одной прямой.*

То обстоятельство, что не может существовать более одной коллинеации, преобразующей полный четырехугольник  $ABCD$  в другой четырехугольник  $A'B'C'D'$ , легко вывести из следующих соображений: если бы существовали две такие коллинеации  $T$  и  $T_1$ , то коллинеация  $T^{-1}T_1$  должна была бы оставлять каждую из точек  $A, B, C, D$  неподвижной. Прямые, соединяющие эти точки попарно, должны были бы в этом случае также оставаться неподвижными (т. е. переходили бы каждая в самую себя) и имели бы, следовательно, на каждой из сторон треугольника  $ABC$  три неподвижные точки. Но это означало бы, что любая точка на каждой из этих сторон остается неподвижной, а следовательно, остается неподвижной и любая прямая, проходящая через точки  $A, B, C$ . Если  $P$  есть некоторая точка плоскости, содержащей треугольник  $ABC$ , то по крайней мере две из трех прямых  $AP, BP, CP$  должны быть различны, и поскольку преобразование  $T^{-1}T_1$  оставляет каждую из этих прямых неподвижной, оно должно оставлять неподвижной и точку  $P$ . Отсюда мы имеем  $T^{-1}T_1 = 1$  или  $T_1 = T$ .

В том, что существует по крайней мере одна коллинеация, преобразующая четырехугольник  $ABCD$  в другой четырехугольник  $A'B'C'D'$ , можно убедиться фактическим построением такого соответствия между элементами двух плоскостей. Трем прямым  $AB, AC, AD$  пучка прямых с центром в точке  $A$  должны соответствовать три прямые  $A'B', A'C', A'D'$  пучка прямых с центром в точке  $A'$ , и это соответствие однозначно определяет проективное соответствие  $T_A$  между этими двумя пучками прямых. Подобным же образом, относя прямым  $BA, BC, BD$  соответственно прямые  $B'A', B'C', B'D'$ , мы устанавливаем единственное проективное соответствие  $T_B$  между пучками прямых с центрами в точках  $B$  и  $B'$ . Каждой точке  $P$ , не лежащей на прямой  $AB$ , мы ставим в соответствие точку пересечения  $P'$  прямых  $T_A(AP)$  и  $T_B(BP)$ . Каждой прямой  $a$  первой плоскости, не проходящей через точки  $A$  и  $B$ , которую можно рассматривать как ось перспективы двух перспективных пучков с центрами в точках  $A$  и  $B$ , мы ставим в соответствие ось перспективы пучков с центрами в точках

$A'$  и  $B'$ , в которые преобразования  $T_A$  и  $T_B$  переводят соответственно перспективные пучки с центрами в точках  $A$  и  $B$ . То обстоятельство, что преобразования  $T_A$  и  $T_B$  преобразуют перспективное соответствие между пучками прямых с центрами в точках  $A$  и  $B$  в перспективное же соответствие между пучками прямых с центрами в точках  $A'$  и  $B'$ , следует из того факта, что прямая  $AB$  соответствует прямой  $A'B'$  в обоих преобразованиях  $T_A$  и  $T_B$ , так что в проективном соответствии между пучками прямых с центрами в точках  $A'$  и  $B'$  прямая  $A'B'$  соответствует самой себе. Двум прямым первой плоскости, пересекающимся на прямой  $AB$ , соответствуют поэтому две прямые второй плоскости, пересекающиеся на прямой  $A'B'$ . Наконец, каждой точке  $P$  прямой  $AB$  мы ставим в соответствие точку  $P'$  прямой  $A'B'$ , определяемую прямой линией, соответствующей прямой первой плоскости, проходящей через точку  $P$ . Таким образом, мы определили взаимно однозначное соответствие между двумя плоскостями, удовлетворяющее определению проективной коллинеации.

Если точки плоскости  $\alpha$  проектируются из точки  $S$  на другую плоскость  $\alpha'$ , а затем точки плоскости  $\alpha'$  проектируются из другого центра  $S'$  обратно в точки плоскости  $\alpha$ , то мы получаем на плоскости  $\alpha$  соответствие  $H$ , в котором, очевидно, каждая точка прямой  $o$  пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\alpha'$  остается неподвижной; неподвижной остается также и точка  $O$ , в которой прямая  $SS'$  пересекает плоскость  $\alpha$ . Такое соответствие на плоскости, при котором остается неподвижной некоторая точка  $O$  и каждая точка прямой  $o$ , называется *перспективной коллинеацией* на плоскости. Если точка  $O$  не лежит на прямой  $o$ , то перспективная коллинеация называется *гомологией*, если же точка  $O$  лежит на прямой  $o$ , то она называется *особенной гомологией*\*. Точка  $O$  и прямая  $o$  называются соответственно *центром* и *осью гомологии* (обыкновенной или особенной).

За центр и ось перспективной коллинеации можно принять любую точку и любую прямую плоскости. Каждые две соответственные точки  $A$  и  $A'$ , очевидно, должны быть коллине-

\* Автор употребляет термин *elation*, для которого не установлен соответствующий русский термин; называя его словами „особенная гомология“, мы, кажется, близко передаем его смысл. (Прим. ред.)

арными с точкой  $O$ , так как прямая  $OA$ , пересекающая ось  $o$  в некоторой точке, должна оставаться инвариантной, и, следовательно, точка  $A'$  должна лежать на прямой  $OA$ . Более того, если нам даны центр  $O$  и ось  $o$ , то перспективная коллинеация однозначно определяется заданием любой пары соответственных точек, коллинеарных с точкой  $O$ . Существование такого рода перспективной коллинеации легко вытекает из следующих соображений: если мы возьмем какую-нибудь плоскость, проходящую через прямую  $o$  и отличную от данной плоскости, и какую-нибудь точку  $S$ , не лежащую ни в одной из двух плоскостей, то легко определим точку  $S'$  так, чтобы искомая коллинеация была представлена произведением двух перспектив с центрами в точках  $S$  и  $S'$ . То, что не может быть более одной такой перспективной коллинеации, вытекает из доказанной нами ранее (стр. 113) основной теоремы.

Перспективные коллинеации вообще представляют частный вид коллинеаций, а именно, они оставляют в покое каждую точку некоторой прямой и каждую прямую, проходящую через некоторую точку. В случае особенной гомологии все проективные соответствия на прямых, проходящих через центр и отличных от оси, будут параболическими, а в случае неособенной гомологии — гиперболическими. Особый интерес представляет так называемая *гармоническая гомология*, при которой каждая пара соответственных точек является гармонической относительно центра и той точки, в которой прямая, соединяющая эти соответственные точки, пересекает ось. Гармоническая гомология имеет, очевидно, порядок 2, т. е. является инволюцией.

Коллинеация на плоскости, оставляющая в покое четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой, сводится к тождественному преобразованию. Если коллинеация оставляет в покое каждую из трех неколлинеарных точек, то говорят, что она принадлежит к I типу, однако, при условии, что она не является гомологией; в этом случае все проективные соответствия на сторонах инвариантного треугольника будут гиперболическими. Если две из таких трех точек совпадают, то мы получим коллинеацию, для которой инвариантная фигура будет состоять из двух точек  $M$  и  $N$  прямой, соединяющей эти точки, и еще одной прямой, проходящей через одну из этих точек. Такого рода коллинеацию

называют коллинеацией II типа (если только она не является особенной гомологией). В этом случае проективное соответствие на прямой, соединяющей двойные точки, будет гиперболическим, а на второй инвариантной прямой — параболическим. Если точки  $M$  и  $N$  совпадают, то инвариантная фигура состоит из единственной точки  $M$  и прямой, проходящей через эту точку; при этом соответствие на инвариантной прямой будет параболическим, равно как и в пучке прямых, проходящих через инвариантную точку; такая коллинеация называется коллинеацией III типа. Наконец, гомологию называют коллинеацией IV типа, а особенную гомологию — коллинеацией V типа.

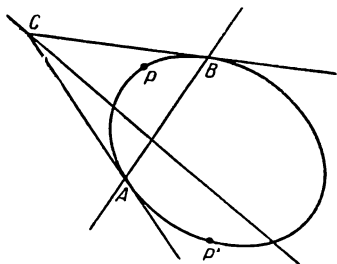
**46. Группы коллинеаций на плоскости.** Совокупность всех коллинеаций на плоскости (включая и тождественную) представляет собой, как мы уже упоминали, так называемую общую группу коллинеаций на плоскости. Важное значение имеет подгруппа общей группы, состоящая из всех коллинеаций на плоскости, оставляющих инвариантной некоторую прямую; это так называемая *аффинная группа*\*. Другую важную группу образует совокупность всех коллинеаций, оставляющих в покое две заданные точки. Эта группа должна, следовательно, оставлять инвариантной и прямую, соединяющую эти две точки; она представляет собой поэтому подгруппу аффинной группы, оставляющей инвариантной эту прямую. Совокупность всех особенных гомологий, имеющих заданную ось, также образует группу, имеющую, как будет показано позднее, весьма важное значение. Для того чтобы доказать, что эта совокупность образует группу, остается

---

\* В обычной терминологии определение аффинной группы, которое дает автор, связывается с тем, что инвариантная прямая, о которой идет речь в этом определении, принимается за бесконечно удаленную прямую плоскости, и прямые, пересекающиеся на этой прямой, получают название параллельных (см. пп. 30 и 31). С этой точки зрения аффинная группа состоит из коллинеаций, которые всякие параллельные прямые преобразуют в параллельные же прямые. Введение бесконечно удаленной прямой (как видно из п. 31) есть шаг к переходу от проективной геометрии к метрической; но этим отнюдь еще не устанавливается метрическая геометрия. Аффинная геометрия поэтому является переходной ступенью от проективной геометрии к метрической. (*Прим. ред.*)

обнаружить, что произведение любых двух особенных гомологий нашей совокупности также представляет собой особенную гомологию. Мы опускаем это доказательство; читатель без труда докажет, что произведение двух особенных гомологий

не может иметь двойной точки, не лежащей на оси.



Ф и г. 54

Общая группа коллинеаций на плоскости имеет большое число подгрупп различного рода\*. Мы указали выше лишь немногие из них, отличающиеся особой простотой и имеющие основное значение для дальнейшего. К этим подгруппам мы хотим присоединить еще одну подгруппу. Суще-

ствуют коллинеации, оставляющие инвариантным некоторое коническое сечение. В самом деле, если  $A$  и  $B$  (фиг. 54) суть две различные точки конического сечения и если касательные в точках  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $C$ , то гармоническая гомология, имеющая своим центром точку  $C$ , а осью — прямую  $AB$ , очевидно, оставляет это коническое сечение инвариантным (стр. 76). Мы можем, однако, легко пойти дальше. Так как всякая коллинеация преобразует любые два проективных пучка прямых снова в два проективных пучка, то она должна, очевидно, преобразовать коническое сечение опять-таки в коническое сечение. Далее, ясно, что коллинеация, имеющая двойные точки  $A, B, C$  и преобразующая точку  $P$  нашего конического сечения в точку  $P'$  того же конического сечения (точки  $P$  и  $P'$  отличны от точек  $A$  и  $B$ ), должна преобразовать коническое сечение, определяемое точками  $A, B, P$  и касательными в точках  $A$  и  $B$ , в коническое сечение, определяемое точками  $A, B, P'$  и касательными в точках  $A$  и  $B$ . Но это коническое сечение совпадает с первым. *Совокупность всех коллинеаций, оставляющих инвариантным заданное коническое сечение, образует группу.*

\* Софусом Ли разысканы все типы подгрупп проективной группы на плоскости, см. Н. Г. Чеботарев, Теория групп Ли, ГТТИ, М. — Л., 1940. (Прим. ред.)

## Г Л А В А VIII

### АЛГЕБРА ТОЧЕК И ВВЕДЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

**47. Сложение точек на прямой.** Мы посвятим настоящую главу изложению одного из наиболее интересных развитий проективной геометрии; речь идет о введении аналитических методов на чисто проективной основе, не опираясь ни на какие понятия метрической геометрии. Мы привыкли всегда связывать понятие величины с числами, а измерения — с идеей координат; поэтому непосвященный читатель с удивлением узнает, что некоторые метрические понятия совершенно не связаны ни с идеей числа, ни с идеей координат. В области проективной геометрии это было впервые усмотрено Штаудтом (1798—1867), который заложил основы для введения аналитических методов без помощи метрики особым, созданным им, исчислением, так называемой *алгеброй вурфов* (1847). Мы будем исходить из несколько отличной точки зрения, менее отвлеченной, но по существу совпадающей с приемом Штаудта.

Прежде всего выберем на прямой произвольно три различные точки, которые обозначим соответственно символами  $0, 1$  и  $\infty$ . Эти символы не должны вызывать у читателя какие-либо представления до тех пор, пока мы не покажем, что они обладают некоторыми свойствами, которые мы привыкли с ними связывать. Свойства эти будут нам ясны после того, как мы установим для этих символов определенные операции. Мы могли бы с таким же успехом обозначить наши три точки буквами  $A, B, C$ , но наши рассуждения будут более просты, если мы с самого начала будем пользоваться символами  $0, 1$  и  $\infty$ . Точно так же будет более удобно обозначать точки нашей прямой строчными буквами алфавита, нежели заглавными, поскольку мы имеем в виду в конечном счете рассматривать эти точки как связанные с числами.

Пользуясь этими тремя точками, мы установим теперь несколько операций над парами точек на нашей прямой. Для этой цели мы воспользуемся двумя проективными группами, которые мы рассматривали уже в предыдущей главе. Первая группа — это группа всех параболических проективных преобразований на прямой с двойной точкой  $\infty$ . Она представляет собой одностранзитивную и коммутативную группу (стр. 109). Пусть  $a$  есть некоторая ( $\neq \infty$ ) точка нашей прямой; обозначим через  $T_a$  преобразование рассматриваемой группы, переводящее точку 0 в  $a$ , так что, следовательно,  $T_a(0) = a$ . Определим теперь операцию сложения  $(+)$  двух любых точек нашей прямой, полагая

$$a + b = T_a(b). \quad (1)$$

Эта операция относит каждой паре точек  $a, b$  прямой однозначно определенную точку  $a + b$ .

В соответствии с нашим определением,  $T_0$  есть тождественное преобразование. Отсюда мы имеем:  $0 + a = a$  для любого  $a$ . Точно так же  $a + 0 = a$ , по определению. Мы имеем, следовательно,

$$0 + a = a + 0 = a. \quad (2)$$

Пусть теперь  $a, b, c$  будут три любые точки прямой и пусть  $T_a T_b = T_r$ . Тогда из соотношения  $T_a T_b(c) = T_r(c)$  следует, что  $a + (b + c) = r + c$ . Если мы положим  $c = 0$ , то из соотношения (2) получим  $a + b = r$ , а вместе с тем

$$a + (b + c) = (a + b) + c. \quad (3)$$

Это означает, что операция сложения удовлетворяет ассоциативному закону.

Так как наша группа преобразований коммутативна, то  $T_a T_b = T_b T_a$ . Если мы применим каждое из этих равных преобразований к точке 0, то сейчас же получим

$$a + b = b + a. \quad (4)$$

Иными словами, операция сложения коммутативна.

Положим, что  $T_r$  есть преобразование, обратное преобразованию  $T_a$ . Так как в этом случае  $T_a T_r$  есть тождественное преобразование, то  $T_a T_r(0) = 0$  или  $a + r = 0$ . Отсюда сле-



дует, что если нам дана некоторая точка  $a (\neq \infty)$ , то существует такая точка  $r$ , что  $a + r = 0$ . Мы обозначаем такую точку  $r$  символом  $-a$  и, следовательно, имеем

$$a + (-a) = 0. \quad (5)$$

Теперь мы можем определить операцию *вычитания* ( $-$ ) а именно, мы будем называть разностью  $a - b$  такую точку  $x$ , для которой  $b + x = a$ . Такая точка  $x$  существует для любой пары точек  $a, b (\neq \infty)$ ; а именно, точка  $(-b) + a$  удовлетворяет этому определению, в силу соотношений (3), (4) и (5). Следовательно, мы имеем

$$a - b = a + (-b). \quad (6)$$

**48. Умножение точек на прямой.** До сих пор мы не пользовались еще точкой 1. Воспользуемся ею для определения второй операции над двумя точками  $a, b$  нашей прямой, которую мы будем называть *умножением* ( $\cdot$ ). Для этой цели мы воспользуемся группой всех гиперболических проективных преобразований прямой, имеющих своими двойными точками 0 и  $\infty$ . Это также одно-транзитивная и коммутативная группа (стр. 109). Пусть  $M_a$  есть преобразование этой группы, переводящее точку 1 в точку  $a (\neq 0, \infty)$ , так что  $M_a(1) = a$ . Мы определим теперь операцию умножения для двух любых точек  $a, b$  при помощи соотношения

$$a \cdot b = M_a(b). \quad (1)$$

В дальнейшем мы будем опускать знак умножения и вместо  $a \cdot b$  писать просто  $ab$ . Определенная нами операция относит каждой паре точек  $a, b (\neq 0, \infty)$  на прямой однозначно определенную точку  $ab$ .

Далее рассуждения ведутся совершенно аналогично тому, как мы это делали для операции сложения, с той только разницей, что преобразования параболической группы, которыми мы пользовались для определения сложения, заменяются преобразованиями гиперболической группы; вместе с тем точка 1 будет играть ту же роль, которую играла точка 0 в предшествующих рассуждениях.

Читатель без труда установит следующие свойства определенной таким образом операции умножения:

$$1a = a1 = a, \quad (2)$$

$$a(bc) = (ab)c, \quad (3)$$

$$ab = ba. \quad (4)$$

Последние два соотношения выражают *ассоциативность и коммутативность умножения*. Нетрудно также показать, что для любой точки  $a (\neq 0, \infty)$  существует точка, которую мы обозначим через  $a^{-1}$ , такая, что

$$aa^{-1} = 1. \quad (5)$$

Операцию *деления* ( $/$ ) мы определим таким образом, что под точкой  $a$ , деленной на точку  $b$ ,  $a/b$ , будем понимать такую точку  $x$ , которая удовлетворяет соотношению  $bx = a$ . Такая точка существует для любого  $b (\neq 0, \infty)$ , а именно, этому условию удовлетворяет точка  $ab^{-1}$ , так что

$$a/b = ab^{-1}. \quad (6)$$

Наконец, мы имеем, очевидно,  $a0 = 0$ , поскольку  $0$  является двойной точкой каждого из проективных преобразований нашей группы. Символ  $0a$  при данном нами выше определении смысла не имеет; мы положим его равным  $0$  по определению. Мы имеем тогда для любого  $a (\neq \infty)$

$$a0 = 0a = 0. \quad (7)$$

**49. Дистрибутивный закон.** Группа гиперболических преобразований, которой мы пользовались для определения умножения, преобразует в самое себя группу параболических проективных преобразований, служившую нам для определения операции сложения (стр. 111). Это означает, что если  $M_a$  есть некоторое преобразование первой группы, а  $T_b$  — некоторое преобразование второй группы, то существует такое преобразование  $T_r$  параболической группы, что  $M_a T_b M_a^{-1} = T_r$  или  $M_a T_b = T_r M_a$ . Опираясь этими двумя равными преобразованиями над некоторой точкой  $c$ , мы получим

$$a(b + c) = r + ac.$$

Если мы положим в этом равенстве  $c = 0$ , то получим  $ab = r$ . Отсюда мы имеем

$$a(b + c) = ab + ac,$$

что выражает *дистрибутивный закон умножения относительно сложения*.

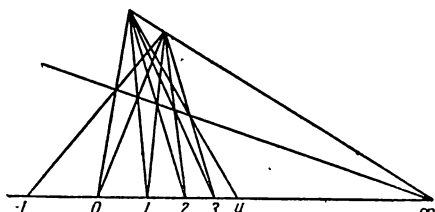
**50. Алгебра точек на прямой.** Мы определили, таким образом, по отношению к трем произвольно выбранным точкам прямой  $0, 1, \infty$  две операции сложения и умножения и обратные им операции вычитания и деления, удовлетворяющие всем формальным законам обыкновенной алгебры. Вся терминология обыкновенной алгебры, по крайней мере поскольку она определяется в терминах четырех рациональных операций, может быть перенесена на эту алгебру точек.

Согласно определениям предыдущих параграфов, элементами нашей алгебры являются скорее собственно точки прямой линии, чем числа в обычном смысле слова. Однако мы можем использовать полученные результаты, для того чтобы показать, как можно отнести каждой точке нашей прямой ( $\neq \infty$ ) определенное число нашей обыкновенной системы чисел. Для этой цели мы отнесем точкам  $0, 1$  соответственно числа  $0$  и  $1$ . Последовательным точкам  $1 + 1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1, \dots$  мы отнесем соответственно числа  $2, 3, 4, \dots$  и, таким образом, каждому целому положительному числу отнесем единственную точку нашей прямой. Целым отрицательным числам мы поставим в соответствие точки таким образом, чтобы удовлетворялось соотношение  $(-n) + n = 0$ . Тогда числу  $1/n$ , равно как и числам  $m/n$ , где  $m$  и  $n$  — целые положительные или отрицательные числа, будут отнесены однозначно определенные точки прямой. Таким образом, всем рациональным числам будут однозначно отнесены в качестве соответственных точки нашей прямой.

Если читатель выполнит обычное построение для параболического проективного соответствия с заданной двойной точкой  $\infty$  (фиг. 55), то он придет к прилагаемому чертежу для построения точек  $2, 3, 4, \dots, -1, \dots$ . Действительно, из теоремы на стр. 57 или непосредственно из чертежа он может усмотреть, что точка  $1$  гармонически сопряжена с точкой  $\infty$  относительно точек  $0$  и  $2$ ; точка  $2$  гармонически

сопряжена с точкой  $\infty$  относительно точек 1 и 3; точка 3 гармонически сопряжена с точкой  $\infty$  относительно точек 2 и 4 и т. д.

Благодаря этим рассуждениям читатель наглядно будет представлять себе, как с помощью описанного процесса определенным точкам прямой ставятся в соответствие положительные и отрицательные числа, коль скоро будет выбрана точка, обозначенная символом  $\infty$ , и числа 0 и 1 будут произвольно отнесены лю-



Фиг. 55

бым двум различным точкам прямой. Дело, однако, станет еще более ясным, если мы отступим на минуту от чисто проективной точки зрения; мы легко заметим следующее: если за точку  $\infty$  принять бесконечно удаленную точку прямой, то точки  $\dots, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  будут расположены на равных расстояниях друг от друга. Это короткое отступление от чисто проективных соображений имеет целью не затушевать, а сделать еще более отчетливым тот факт, что определения нашей алгебры точек и вытекающее из них соответствие между точками прямой и числами обыкновенной алгебры построено на чисто проективном базисе и не опирается на какие бы то ни было метрические понятия.

Установив с помощью предшествующих рассуждений взаимно однозначное соответствие между множеством точек, которые можно называть рациональными точками прямой (по отношению к точкам 0, 1,  $\infty$ ) и рациональными числами, мы можем легко прийти к более общим заключениям, а именно, если предположить, что все точки прямой могут быть в определенном порядке приведены в соответствие с действительными числами, — установленное нами соответствие между рациональными точками и рациональными числами уже приводит к такому соответствию между всеми действительными числами и всеми точками прямой\*. Чтобы привести это во всех

\* Конечно, если требовать *непрерывность* соответствия, которую автор, несомненно, молчаливо предполагает. (Прим. ред.)

деталях, необходимо было бы заняться углубленным рассмотрением основ проективной геометрии и теории действительных чисел. Такого рода рассмотрения едва ли соответствовали бы духу настоящего сочинения, которое с самого начала строилось на основе интуиции. С этой интуитивной точки зрения полученные нами результаты представляются достаточно ясными и без дальнейшей разработки. Результаты эти могут быть сформулированы следующим образом:

*Приняв три различные точки прямой за точки  $0, 1, \infty$ , мы можем с помощью описанного нами метода установить взаимно однозначное соответствие между действительными точками прямой и множеством действительных чисел.* Говорят, что основные точки  $0, 1, \infty$  устанавливают на прямой шкалу; числа, отнесенные каждой точке прямой, называются координатами точек в этой шкале.

**51. Аналитическое выражение проективного соответствия.** Положим, что нами установлена на прямой шкала, и пусть  $x'$  есть координата точки, отнесенной точке с координатой  $x$  в некотором проективном соответствии на этой прямой. Посмотрим, как можно выразить алгебраически координату  $x'$  через  $x$ .

Заметим, прежде всего, что соотношения

$$x' = a + x \quad (a \neq \infty), \quad (I)$$

$$x' = ax \quad (a \neq 0, \infty), \quad (II)$$

согласно определению операций сложения и умножения, представляют собой проективные соответствия. В самом деле, мы знаем, что соотношение (I) представляет собой параболическое соответствие с двойной точкой  $\infty$  и что соотношение (II) выражает гиперболическое соответствие с двойными точками  $0$  и  $\infty$ . Естественно теперь установить (в порядке определения) следующие свойства символа  $\infty$ :  $\infty + a = \infty$  и  $\infty \cdot b = \infty$  ( $b \neq 0$ )\*. Далее, легко показать, что соотношение

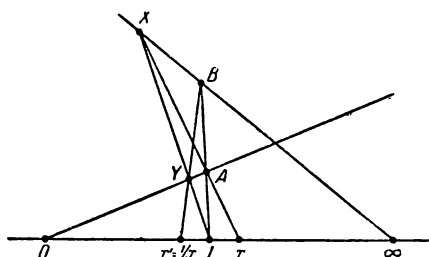
$$x' = 1/x \quad (III)$$

\* Определение (1) п. 47 (стр. 120), как там указано, предполагает  $a \neq \infty$ . Поэтому нужно дополнительное соглашение (определение):  $\infty + a = \infty$ . Точно так же, определение (1) п. 48 на стр. 121 предполагает  $a \neq \infty$ ; поэтому нужно дополнительное соглашение:  $a \cdot \infty = \infty$ . При этом все еще предполагается  $a \neq 0$ . (Прим. ред.)

представляет собой проективное соответствие. Действительно, из рассмотрения прилагаемого чертежа (фиг. 56) читатель легко убедится в том, что, согласно определению умножения,  $xx' = 1$ . С другой стороны, это построение непосредственно дает

$$[x] \stackrel{A}{\underset{\wedge}{=}} [X] \stackrel{1}{\underset{\wedge}{=}} [Y] \stackrel{B}{\underset{\wedge}{=}} [x'],$$

откуда следует, что соответствие между точками  $x$  и  $x'$  — проективное. Более того, ясно, что это проективное соответ-



Ф и г. 56

ствие преобразует точку 0 в точку  $\infty$ , а точку  $\infty$  — в точку 0. В соответствии с этим мы приходим к необходимости установить (в качестве определений) еще два свойства символа  $\infty$ , а именно:  $1/0 = \infty$  и  $1/\infty = 0$ . Далее, полагая  $x' = x$ , мы из соотношения (III)

получаем равенство  $x^2 = 1$ , которому должны удовлетворять двойные точки нашего соответствия. Это означает, следовательно, что проективное соответствие  $x' = 1/x$  должно иметь 1 и  $-1$  своими двойными точками. Ясно также, что это соответствие является инволюцией.

Мы можем теперь доказать следующую теорему:

*Всякое проективное соответствие на прямой представляет собой произведение\* соответствий типа (I), (II) и (III) и может быть представлено в виде*

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}. \quad (1)$$

Обратно, всякое соотношение вида (1) представляет собой проективное соответствие, если  $ad - bc \neq 0$ .

Докажем прежде всего вторую часть теоремы. Положим сначала, что  $c \neq 0$ . Мы можем тогда записать равенство (1)

\* Т. е. результат последовательного применения. (Прим. ред.)

в виде

$$x' = \frac{a}{c} + \frac{b - ad/c}{cx + d}. \quad (2)$$

Это непосредственно показывает, что выражение  $ad - bc$ , называемое *определителем* преобразования, должно быть отлично от нуля, ибо в противном случае равенство (2) относилось бы любой точке  $x$  одну и ту же точку  $x' = a/c$ , в то время как проективное соответствие есть соотношение взаимно однозначное. Равенство (2) показывает, далее, что выражаемое им соответствие является результатом следующих пяти преобразований:

$$\begin{aligned} x_1 &= cx, & x_4 &= (b - ad/c)x_3, \\ x_2 &= x_1 + d, \\ x_3 &= 1/x_2, & x' &= x_4 + a/c. \end{aligned}$$

Так как каждое из этих равенств выражает проективное преобразование, то и результат их последовательного применения, выражаемый соотношением (1), также должен быть проективным преобразованием. Если  $c = 0$ , но  $ad \neq 0$ , то нетрудно показать, несколько изменив доказательство, что соотношение (1) представляет собой произведение типа (I) и (II). Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Остается доказать, что любое проективное соответствие на прямой действительно может быть представлено соотношением вида (1). Посмотрим, прежде всего, в какую точку соответствие (1) преобразует точку  $\infty$ . Если мы применим к этой точке последовательно пять приведенных выше преобразований, на которые мы разложили соответствие (1), то увидим, что первые два из них оставляют эту точку неизменной, третье преобразует ее в точку 0, четвертое оставляет точку 0 неизменной и, наконец, последнее преобразует точку 0 в точку  $a/c$ . Таким образом, соответствие (1) преобразует точку  $\infty$  в точку  $a/c$ . Это побуждает нас присвоить символу  $\infty$  еще одно свойство, а именно, если  $x = \infty$ , то  $(ax + b)/(cx + d) = a/c$ .

Согласно основной теореме (стр. 51), проективное соответствие полностью определяется заданием трех пар соответственных точек. Пусть мы имеем соответствие, преобразующее точки 0, 1,  $\infty$  соответственно в точки  $p$ ,  $q$ ,  $r$ . Легко

показать, что преобразование вида (1)

$$x' = \frac{r(q-p)x + p(r-q)}{(q-p)x + (r-q)}$$

преобразует точку 0 в точку  $p$ , точку 1 — в точку  $q$  и, учитывая только что установленное свойство символа  $\infty$ , точку  $\infty$  — в точку  $r$ , откуда следует, что оно совпадает с заданным преобразованием. Определитель  $ad - bc$  в этом случае равен  $(p-q)(q-r)(r-p)$ ; если  $p, q, r$  — три различные точки, то он отличен от нуля. Этим исчерпывается доказательство.

Необходимо указать некоторые следствия:

*Проективное соответствие  $x' = a/x$  ( $a \neq 0, \infty$ ) преобразует 0 в  $\infty$  и  $\infty$  в 0.*

Это следует из того факта, что указанное соответствие представляет собой произведение двух проективных соответствий  $x_1 = 1/x$  и  $x' = ax_1$ . Первое из них преобразует 0 в  $\infty$  и обратно, в то время как второе оставляет обе эти точки неизменными. Имея в виду то, что было сказано о свойствах символов 0,  $\infty$ , мы приходим к следующим определениям действий над ними:

$$a/0 = \infty \text{ и } a/\infty = 0 \quad (a \neq 0, \infty).$$

*Всякое проективное соответствие, оставляющее неизменной точку  $\infty$ , может быть представлено в виде  $x' = ax + b$ .*

*Всякая двойная точка, которую может иметь преобразование (1), должна удовлетворять уравнению  $sx^2 + (d-a)x - b = 0$ .*

Последний результат показывает, вместе с тем, что в действительной области имеется три типа проективных преобразований; соответственно этому, последнее уравнение имеет два различных действительных корня, два совпадающих корня или два сопряженных мнимых корня. Эти три типа соответствуют знакомым нам трем типам проективных соответствий — гиперболическому, параболическому и эллиптическому. Мы можем, однако, предполагать, что наша прямая вместе с действительными точками содержит также точки, соответствующие всем возможным комплексным числам. В этой комплексной области мы будем иметь только два



типа проективных соответствий, смотря по тому, будут ли его двойные точки различными или совпадающими. Ниже мы будем иметь случай вернуться к этим соображениям. В настоящий момент мы ограничимся, как делали это до сих пор, действительной областью. Однако, на основании только что сказанного, мы можем *смотреть на эллиптическое преобразование как на такое, которое имеет две сопряженные мнимые двойные точки (когда такая точка зрения будет для нас целесообразной).*

Прежде чем двигаться дальше, читателю следует отдать себе отчет в том, что приведенные выше соображения, в силу принципа двойственности, могут быть с таким же основанием применены к прямым пучка прямых (или к плоскостям пучка плоскостей), как и к точкам прямолинейного ряда точек. Это значит, что мы можем построить алгебру прямых линий в пучке прямых, приняв любые три различные прямые за прямые  $0$ ,  $1$  и  $\infty$  и установив с их помощью шкалу в пучке прямых. Прямые пучка могут быть, таким образом, приведены во взаимно однозначное соответствие с нашей системой чисел. Таким путем мы приходим к идее координации прямых пучка. Проективное преобразование в пучке прямых может быть поэтому представлено с помощью соотношения (1), стр. 126 и сл.

**52. Сложное отношение.** Теперь мы подготовлены к тому, чтобы установить выражение, имеющее в проективной геометрии весьма важное значение, выражение, которое часто кладется в основу построения нашего предмета, но которое получается обычно из метрических соображений; однако, такой прием представляется нам нежелательным с точки зрения выявления самой природы проективных свойств.

Задача, приводящая к введению этого выражения, заключается в следующем. Согласно основной теореме, любые три различные точки прямой проективны любым трем различными точкам другой или той же самой прямой; если же четыре различные точки прямой приводятся в проективное соответствие с четырьмя другими различными коллинеарными точками, то они должны удовлетворять некоторому условию. Это условие мы и хотим сейчас установить. Начнем со следующего определения:

Пусть  $a, b, c, d$  — четыре различные точки прямой и  $T$  — проективное преобразование, переводящее точки  $a, b, c$  соответственно в точки  $\infty, 0, 1$ ; координата точки, в которую преобразование  $T$  переводит четвертую точку  $d$ , называется *сложным отношением*\* четырех заданных точек (в указанном порядке); оно обозначается символом  $\Re(ab, cd)$ . То же определение остается в силе и в том случае, если точка  $d$  совпадает с одной из различных точек  $a, b, c$ . Если две из этих последних точек совпадают, а точка  $d$  отлична от каждой из них, то мы определяем сложное отношение  $\Re(ab, cd)$  как то из отношений  $\Re(ba, dc)$ ,  $\Re(cd, ab)$ ,  $\Re(dc, ba)$ , в котором первые три элемента отличны друг от друга. Это определяет сложное отношение для любых четырех точек, из которых по крайней мере три различны между собой.

Теперь мы можем показать, что сложное отношение четырех точек с координатами  $a, b, c, d$  выражается соотношением

$$\lambda = \Re(ab, cd) = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}.$$

В самом деле, преобразование

$$x' = \frac{a-c}{a-x} : \frac{b-c}{b-x}$$

может быть приведено к соотношению вида (1) предыдущего параграфа, с определителем, отличным от нуля, если только три точки  $a, b, c$  отличны друг от друга. Более того, оно преобразует точки  $a, b, c$  соответственно в точки  $\infty, 0, 1$ . Отсюда следует, что оно преобразует точку  $d$  в точку  $\Re(ab, cd)$ . Если точки  $a, b, c$  не все различны, то мы можем подобным же образом использовать одно из других выражений, данных нами в определении.

Заметим, в частности, что если  $a, b, c$  — три различные точки прямой, то мы имеем  $\Re(ab, ca) = \infty$ ,  $\Re(ab, cb) = 0$  и  $\Re(ab, cc) = 1$ .

Если точки  $ab, cd$  образуют гармоническую четверку, то  $\Re(ab, cd) = -1$ , так как, согласно определению точки  $-1$ , мы имеем  $H(\infty, 0, 1, -1)$ .

---

\* В русской литературе оно называется также *ангармоническим отношением* или *двойным отношением*. (Прим. ред.)

Ясно теперь, что две четверки точек могут быть приведены в проективное соответствие в том и только в том случае, если они имеют одно и то же сложное отношение, т. е.  $abcd \overline{\wedge} a'b'c'd'$ , тогда и только тогда, когда  $\Re(ab, cd) = \Re(a'b', c'd')$ . В самом деле, если две заданные четверки точек проективны друг другу и одна из них проективна соответственно точкам  $\infty, 0, 1, \lambda$ , то ясно, что и другая четверка также должна быть проективна четверке точек  $\infty, 0, 1, \lambda$ . Обратно, соотношение

$$\frac{(a-c)(b-x)}{(a-x)(b-c)} = \frac{(a'-c')(b'-x')}{(a'-x')(b'-c')},$$

очевидно, определяет проективное соответствие между точками  $x$  и  $x'$ ; это показывает, что две четверки точек действительно будут проективны, если их сложные отношения равны.

Этот основной результат может быть выражен еще иначе, а именно, мы можем сказать, что *сложное отношение инвариантно по отношению к любому проективному преобразованию*. Читатель может попутно проверить справедливость этого утверждения, подвергая непосредственно сложное отношение последовательно проективным преобразованиям трех типов (I), (II), (III), на которые мы в предыдущем параграфе (стр. 125—126) разлагали любое проективное преобразование, и замечая, что сложное отношение остается неизменным при каждом из этих преобразований.

**53. Проективное соответствие между двумя различными формами (образами) первой ступени.** До сих пор мы рассматривали только аналитические выражения проективного преобразования в одном и том же образе первой ступени. Однако не представляет труда найти выражение для проективного соответствия между двумя различными образами, т. е. между двумя прямолинейными рядами точек на различных прямых или, например, между прямолинейным рядом точек и пучком прямых. Пусть для каждого из двух образов будет установлена шкала путем обозначения символами  $\infty, 0, 1$  трех отличных друг от друга элементов каждого из этих образов. Пусть  $x$  есть координата некоторого элемента одного из этих образов, а  $y$  — координата некоторого эле-

мента другого образа по отношению к установленным на этих образах шкалам. Тогда равенство  $y=x$  означает, что два элемента, из которых один принадлежит одному из наших образов, а другой — другому, имеют одинаковые координаты, если точка  $y$  соответствует точке  $x$  в проективном соответствии, преобразующем элементы  $\infty, 0, 1$  одного из этих образов соответственно в элементы  $\infty, 0, 1$  другого. Это показывает, что *проективное соответствие между элементами двух различных образов всегда может быть представлено соотношением  $y=x$  при надлежащем выборе шкал в обоих этих образах\**. С другой стороны, если координаты элементов двух образов находятся в таком соотношении, что равенство  $y=x$  представляет собой проективное соответствие, то *любое* проективное соответствие между этими двумя образами может быть выражено равенством

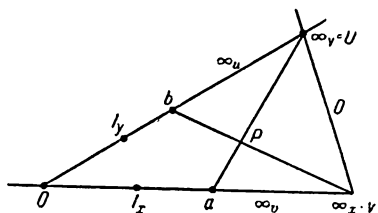
$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

**54. Координаты точки и прямой на плоскости.** Обратимся теперь к задаче определения точек и прямых на плоскости при помощи координат. В случае, когда речь идет о координатах точки, читатель легко усмотрит аналогию с приемом, применяемым в аналитической геометрии. Однако двойственное этому понятие координат прямой будет для него новым, если он впервые приступает к изучению проективной геометрии.

Чтобы определить координаты точки на плоскости, поступаем следующим образом. Пусть нам даны две различные

\* Эта мысль, повидимому, нуждается в некотором пояснении. Положим, что на прямой установлена проективная координация точек, причем значения  $\infty, 0, 1$  присвоены точкам  $A, B, C$ ; пусть  $x$  — координата произвольной точки  $M$  для этой шкалы. Положим, что на этой или другой прямой установлена проективная координация, при которой те же значения  $\infty, 0, 1$  отнесены точкам  $A', B', C'$ ; пусть  $y$  — координата произвольной точки  $N$  соответствующего образа. Если теперь каждой точке  $M(x)$  мы отнесем ту точку  $N(y)$ , для которой  $y=x$ , то этим между прямыми будет установлено проективное соответствие, относящее точкам  $A, B, C$  точки  $A', B', C'$ . Так как всякое проективное соответствие определяется тем, в какие точки перейдут три точки прямой (стр. 51), то ясно, что таким образом можно охарактеризовать каждое проективное соответствие. (Прим. ред.)

прямые на плоскости; на каждой из этих прямых устанавливаем шкалу произвольно, за исключением того, что точку  $O$  пересечения обеих прямых принимаем за точку  $0$  обеих шкал. Пусть  $1_x$  и  $\infty_x = V$  — две другие основные точки, определяющие шкалу на одной из этих прямых, которую мы назовем *осью  $x$ -ов* (*осью абсцисс*); соответствующие точки на другой прямой, которую мы назовем *осью  $y$ -ов* (*осью ординат*), обозначим через  $1_y$  и  $\infty_y = U$  (фиг. 57). Тогда если  $P$  есть произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой  $UV$ , то прямая  $UP$  пересекает ось  $x$ -ов в определенной точке, координата которой будет равна, скажем,  $a$ , а прямая  $VP$  пересечет ось  $y$ -ов также в определенной точке, координата которой будет равна, скажем,  $b$ . Пара чисел  $a, b$  однозначно определяется точкой  $P$ , и, наоборот, два таких числа — одно, относящееся к оси  $x$ -ов, другое — к оси  $y$ -ов, однозначно определяют точку  $P$  (не лежащую на прямой  $UV$ ). Два числа  $a, b$  называются *координатами*

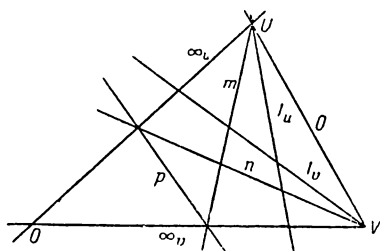


Ф и г. 57

точки  $P$ , которая обозначается символом  $(a, b)$ , причем координата  $x$ , или *абсцисса*, пишется всегда на первом месте, а координата  $y$ , или *ордината*, — на втором. Все точки оси  $x$ -ов имеют координаты вида  $(a, 0)$ , а все точки оси  $y$ -ов — координаты вида  $(0, b)$ . Точки прямой  $UV$  не имеют координат в этой системе. Эта особенность точек, расположенных на прямой  $UV$ , будет устранена далее (см. п. 57).

Соображения, двойственные (на плоскости) только что изложенным, приводят к понятию *координат прямой линии*. Если нам даны два пучка прямых с центрами в двух различных точках  $U, V$ , то мы устанавливаем для каждого из этих пучков шкалу, выбирая основные прямые  $\infty, 0, 1$  произвольно, за тем только исключением, что прямая  $UV$ , соединяющая центры обоих пучков, принимается за прямую  $0$  обеих шкал. В шкале пучка  $U$  мы обозначаем две другие основные прямые соответственно через  $1_u$  и  $\infty_u$ ; в пучке  $V$  мы обозначаем эти прямые соответственно через  $1_v$  и  $\infty_v$  (фиг. 58).

Любая прямая  $p$  нашей плоскости, не проходящая через точку пересечения прямых  $\infty_u$  и  $\infty_v$ , пересекает прямую  $\infty_v$  в точке, определяющей в пучке  $U$  некоторую прямую; пусть координата ее в шкале пучка  $U$  будет  $m$ ; точно так же она пересекает прямую  $\infty_u$  в точке, определяющей в пучке  $V$  прямую, координата которой в шкале пучка  $V$  будет, скажем,  $n$ . Пара чисел  $m, n$  однозначно определяется



Ф и г. 58

прямой  $p$ ; и обратно, два таких числа, из которых одно принадлежит шкале  $U$ , а другое — шкале  $V$ , однозначно определяют прямую  $p$ . Эти числа называются *линейными координатами*  $m, n$  прямой  $p$ , и последняя может быть представлена символом  $[m, n]$ , в котором  $u$ -координата всегда пишется

на первом месте, а  $v$ -координата — на втором. Мы воспользовались прямыми скобками вместо круглых, для того чтобы отличить символ, обозначающий прямую линию, от символа, обозначающего точку. Всякая прямая, проходящая через центр  $U$ , имеет координаты вида  $[m, 0]$ , а всякая прямая, проходящая через точку  $V$ , — координаты вида  $[0, n]$ . Прямые, проходящие через точку  $O$ , не имеют координат в этой системе. Эта особенность прямых, проходящих через точку  $O$ , тоже будет устранена в п. 57.

**55. Уравнение прямой.** Пусть прямая  $p$ , не проходящая через точку  $O$ , пересекает ось  $x$ -ов в точке, имеющей абсциссу  $a$ , а ось  $y$ -ов — в точке, имеющей ординату  $b$ . Пусть  $P = (x, y)$  есть переменная точка этой прямой. Если прямая  $p$  пересекает прямую  $UV$  в точке  $M$  (фиг. 59), то имеем

$$\infty_x 0 \quad ax \underset{\wedge}{\overset{U}{M}} b \quad a \underset{\wedge}{\overset{V}{P}} \infty_y b 0 y,$$

откуда (стр. 131)

$$\Re(\infty_x 0, ax) = \Re(\infty_y b, 0y);$$

раскрывая это выражение, получим

$$\frac{x}{a} = \frac{b-y}{b} \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Обратно, всякая точка  $(x, y)$ , координаты которой удовлетворяют этому уравнению, лежит на прямой  $p$ . В соответствии с этим последнее уравнение называется *точечным уравнением* прямой.

Положим теперь, что прямая  $p$  проходит через точку  $O$ ; пусть  $A = (h, k)$  есть некоторая точка на прямой, отличная от точки  $O$ , и пусть, как и выше,  $P = (x, y)$  — переменная точка прямой  $p$ . Если прямая  $p$  пересекает прямую  $UV$  в точке  $M$  (фиг. 60), то имеем

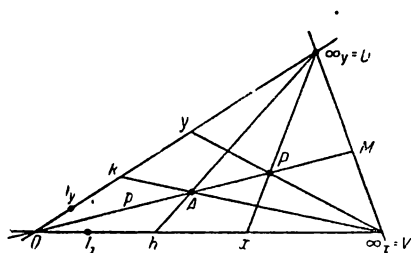
$$\infty_x 0 h x \overline{\wedge} MOAP \overline{\wedge} \infty_y 0 k y;$$

отсюда (стр. 131)

$$\Re(\infty_x 0, hx) = \Re(\infty_y 0, ky)$$

или, в раскрытом виде,  $x/h = y/k$ .

Это и есть уравнение прямой, проходящей через начало координат  $O$ .



Фиг. 60

Двойственные соображения приводят к понятию *линейного уравнения* точки, т. е. к уравнению, которое удовлетворяется координатами  $u, v$  любой прямой, проходящей через эту точку, и никакой другой.

**56. Сопряженные координаты точки и прямой.** Результаты последнего параграфа могут быть представлены в осо-

бенно симметричной и выразительной форме при надлежащем выборе систем точечных и линейных координат. Для этой цели положим, что нам задана система точечных координат, т. е. ось  $x$ -ов и ось  $y$ -ов с установленной на каждой из них шкалой, как это было описано выше; поместим центр  $U$  системы линейных координат в точке  $U = \infty_y$ , а центр  $V$  — в точке  $V = \infty_x$ , и пусть прямая  $u_\infty$  совпадает с осью  $y$ -ов, а прямая  $v_\infty$  — с осью  $x$ -ов. Для того чтобы наша система линейных координат была полностью определена, остается только выбрать прямые  $1_u$  и  $1_v$ ; за прямую  $1_u$  возьмем прямую, проходящую через точку  $U$  и точку  $-1_x$  на оси  $x$ -ов; пусть, далее,  $T$  есть проективное соответствие, относящее каждой прямой, проходящей через точку  $U$ , точку на оси  $x$ -ов, имеющую ту же координату; пусть, наконец,  $T'$  есть проективное соответствие, в котором каждой прямой, проходящей через точку  $U$ , соответствует та точка оси  $x$ -ов, в которой данная прямая пересекает эту ось; тогда проективное соответствие  $T'T$  преобразует ось  $x$ -ов в самое себя и заменяет друг другом точки  $0$  и  $\infty_x$ , а также точки  $1_x$  и  $-1_x$ . Преобразование  $T'T$  представляет собой, следовательно, инволюцию  $x' = -1/x$ . Это означает, что при таком построении обеих систем координат *прямая, проходящая через точку  $U$  и имеющая координату  $u$ , пересекает ось  $x$ -ов в точке с абсциссой  $-1/u$ , а точка, лежащая на оси  $x$ -ов и имеющая координату  $x$ , лежит на прямой, проходящей через точку  $U$  и имеющей координату  $-1/x$ .*

Подобным же образом, если мы выберем в качестве прямой  $1_v$  прямую, проходящую через точку  $V$  и пересекающую ось  $y$ -ов в точке, имеющей координату  $-1_y$ , то *прямая, проходящая через точку  $V$  и имеющая координату  $v$ , пересечет ось  $y$ -ов в точке с координатой  $-1/v$ ; вместе с тем точка, лежащая на оси  $y$ -ов и имеющая координату  $y$ , будет лежать на прямой, проходящей через точку  $V$  и имеющей координату  $-1/y$ .*

Прямая  $p$ , которую мы рассматривали в предыдущем параграфе, не проходящая через точку  $O$  и пересекающая ось  $x$ -ов и ось  $y$ -ов в точках с координатами  $a$  и  $b$  соответственно, будет тогда представлять собой прямую  $[m, n]$  с координатами  $m = -1/a$  и  $n = -1/b$ . Подставляя эти значения в уравнение прямой, мы получим, что *точечное урав-*



нение прямой  $[t, n]$  есть  $tx + ny + 1 = 0$ . Двойственное (на плоскости) предложение будет гласить: *Линейное уравнение точки  $(a, b)$  есть  $ax + by + 1 = 0$* . Оба эти предложения могут быть сведены в одно:

*Необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка  $(a, b)$  лежала на прямой  $[t, n]$ , есть равенство  $ta + nb + 1 = 0$ .*

### 57. Однородные координаты на прямой и на плоскости.

Координаты, которые мы установили для точек прямой, а затем ввели для точек и прямых на плоскости, не вполне удовлетворительны для аналитического выражения проективных элементов. Читатель вспомнит, что в случае координат на прямой точка  $\infty$  являлась особой точкой, так что мы вынуждены были определить некоторые особые ее свойства. Аналогично на плоскости, точки, лежащие на прямой  $UV$ , и прямые, проходящие через точку  $O$ , оказались особыми по отношению к нашей системе координат. Мы намерены теперь модифицировать наше определение координат таким образом, чтобы избежать этих затруднений.

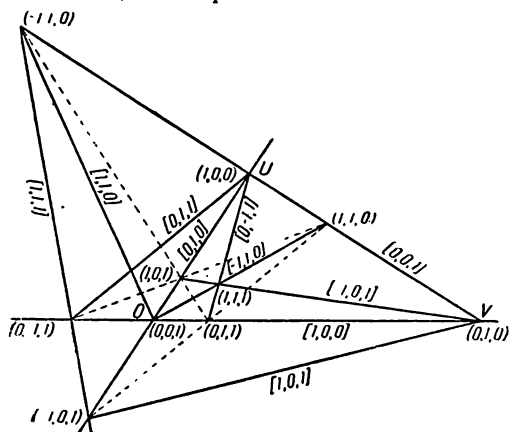
Исходя из координат на прямой, мы заменяем координату  $x$  каждой точки прямой, отличной от  $\infty$ , двумя координатами  $x_1, x_2$  такими, что  $x = x_1/x_2$ . Каждая точка на прямой будет тогда представлена двумя координатами  $x_1, x_2$ , причем имеется в виду, что  $(kx_1, kx_2) = (x_1, x_2)$  для любого  $k \neq 0$ . Точка  $\infty$  имеет координаты  $(1, 0) = (k, 0)$ . Основными точками шкалы будут  $0 = (0, 1)$ ,  $1 = (1, 1)$ ,  $\infty = (1, 0)$ . Проективное соответствие будет выражаться равенствами

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= ax_1 + bx_2, \\ \rho x'_2 &= cx_1 + dx_2. \end{aligned} \quad (ad - bc \neq 0)$$

Точка  $(0, 1)$  преобразуется при этом в точку  $(b, d)$ , а точка  $(1, 0)$  — в точку  $(a, c)$ , как оно и должно быть. Искключительный характер точки  $\infty$  при этом новом методе задания точек на прямой устраняется. Координаты  $(x_1, x_2)$  называются *однородными координатами* на прямой, в отличие от тех, которыми мы пользовались ранее и которые мы в дальнейшем будем называть *неоднородными*.

Подобный же прием находит применение и на плоскости. Пусть нам дана система сопряженных точечных и линейных

координат, описанная в предыдущем параграфе; мы заменим символ  $(x, y)$ , которым обозначена точка, не лежащая на прямой  $UV$ , символом  $(x_1, x_2, x_3)$ , причем  $x:y:1 = x_1:x_2:x_3$ . Точку  $V = \infty_y$  мы обозначим символом  $(0, 1, 0)$ , точку  $U = \infty_x$  — символом  $(1, 0, 0)$  и точку, в которой прямая, соединяющая точку  $O$  с точкой  $(1, 1)$ , пересекает прямую  $UV$  (фиг. 61), — символом  $(1, 1, 0)$ . Любая другая точка, не лежащая на прямой  $UV$  и имевшая в старой системе координат



Фиг. 61

имевшая в старой системе координат  $(a, b)$ , соединяется с точкой  $O$  прямой, уравнение которой (стр. 135) будет  $x/y = a/b$ . Это дает нам основание обозначить точку, в которой эта прямая пересекает линию  $UV$ , символом  $(a, b, 0)$ . Теперь каждой точке плоскости отнесена тройка чисел  $(x_1, x_2, x_3)$ ; при этом, конечно, имеется в виду, что точ-

ки  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $(kx_1, kx_2, kx_3)$  совпадают при любом  $k \neq 0$ . Обратно, всякая тройка чисел  $(x_1, x_2, x_3)$ , за исключением тройки  $(0, 0, 0)$ , однозначно определяет некоторую точку на плоскости. Эта новая система координат называется системой *однородных точечных координат* на плоскости; старую систему мы будем в дальнейшем называть *неоднородной*. Соображения, двойственные вышеизложенным, приводят к системе *однородных линейных координат* на плоскости, при помощи которых каждой прямой на плоскости ставится в соответствие символ  $[u_1, u_2, u_3]$ , причем в этой системе прямые, проходящие через точку  $O$ , которые были особыми в системе неоднородных координат, характеризуются тем, что для любой такой прямой мы имеем  $u_3 = 0$ .

Читатель должен заметить, что различные точки и прямые, которыми мы пользуемся для установления системы

однородных координат на плоскости, входят в них совершенно симметрично. Так называемая *сеть референции* (координатная сеть) такой системы состоит теперь из треугольника  $OUV$ , стороны которого определяются уравнениями  $x_1=0$ ,  $x_2=0$ ,  $x_3=0$ , а вершины имеют в линейных координатах уравнения  $u_1=0$ ,  $u_2=0$ ,  $u_3=0$ . Единичная точка  $(1, 1, 1)$  этой системы, за которую может быть принята любая точка, не лежащая на сторонах треугольника  $OUV$ , определяет на его сторонах точки  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$  и  $(1, 1, 0)$ . Единичная прямая  $[1, 1, 1]$  однозначно определяется в этом случае как прямая, проходящая через точки  $(-1, 1, 0)$ ,  $(-1, 0, 1)$  и  $(0, -1, 1)$ . Что все эти точки лежат на одной прямой, следует из того, что прямая  $[1, 1, 1]$  служит осью перспективы треугольника  $OUV$  и треугольника, образованного единичными точками на сторонах треугольника  $OUV$ ; треугольники эти, очевидно, перспективны, причем точка  $(1, 1, 1)$  — центр этой перспективы.

Уравнение  $mx + ny + 1 = 0$ , представляющее собой в неоднородных координатах прямую  $[m, n]$ , не проходящую через точку 0, принимает в однородных координатах вид  $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0$ , где  $[m_1, m_2, m_3]$  суть однородные координаты этой прямой. В самом деле, *необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка  $(a_1, a_2, a_3)$  лежала на прямой  $[m_1, m_2, m_3]$ , выражается равенством  $m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3 = 0$ .*

Замечательная симметрия этого результата не оставляет желать ничего лучшего. Мы можем видеть в этом отражение принципа двойственности, так как по сути дела невозможно никаким образом установить различие между точечными и линейными координатами; это значит, что мы можем в любых аналитических вычислениях заменить точечные координаты линейными, и обратно; это не повлияет на правильность результатов.

Читатель, знакомый с теорией определителей, легко усмотрит, что *уравнение прямой, проходящей через две точки  $A=(a_1, a_2, a_3)$  и  $B=(b_1, b_2, b_3)$ , есть*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

и что координаты этой прямой имеют значения

$$\left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Аналогичные соотношения имеют место для уравнения точки пересечения двух прямых  $m = [m_1, m_2, m_3]$  и  $n = [n_1, n_2, n_3]$ .

В качестве приложения этих результатов читателю будет интересно проверить справедливость теоремы Дезарга (стр. 38) аналитически. Для этой цели мы можем принять один из треугольников, скажем треугольник  $A'B'C'$ , за координатный треугольник  $A' = (0, 0, 1)$ ,  $B' = (0, 1, 0)$ ,  $C' = (1, 0, 0)$ , а за центр перспективы обоих треугольников — точку  $P = (1, 1, 1)$ . Вершина  $A$  второго треугольника  $ABC$  должна в этом случае лежать на прямой  $PA'$ , т. е. на прямой, уравнение которой есть  $x_1 - x_2 = 0$ . Мы можем поэтому принять за точку  $A$  точку  $A = (1, 1, a)$ , где  $a$  может быть взято произвольным. Подобным же образом за вершину  $B$  берем точку  $B = (1, b, 1)$ , а за точку  $C$  — точку  $C = (c, 1, 1)$ . Тогда, пользуясь полученными только что формулами и двойственными им, получим следующее:

координаты прямой  $A'B'$  суть  $[1, 0, 0]$ ;

координаты прямой  $AB$  суть  $[1 - ab, a - 1, b - 1]$ .

Отсюда координаты точки их пересечения  $C''$  будут

$$C'' = (0, 1 - b, a - 1).$$

Подобным же образом

$$A'' = (1 - c, b - 1, 0) \text{ и } B'' = (c - 1, 0, 1 - a).$$

Определитель этих трех точек оказывается равным нулю, откуда следует, что эти три точки лежат на одной прямой.

**58. Прямолинейные ряды точек и пучки прямых.** Для представлений точек прямолинейного ряда и прямых пучка удобным является следующий метод:

Если  $A = (a_1, a_2, a_3)$  и  $B = (b_1, b_2, b_3)$  суть две различные точки прямолинейного ряда точек, то любая прямая  $p$  Если  $m = [m_1, m_2, m_3]$  и  $n = [n_1, n_2, n_3]$  суть две различные прямые пучка прямых, то любая прямая  $p$

бая точка  $P$  этого ряда этого пучка может быть может быть представлена представлена в виде в виде

$$P = (\lambda_2 a_1 + \lambda_1 b_1, \lambda_2 a_2 + \lambda_1 b_2, \lambda_2 a_3 + \lambda_1 b_3), \quad p = [\mu_2 m_1 + \mu_1 n_1, \mu_2 m_2 + \mu_1 n_2, \mu_2 m_3 + \mu_1 n_3],$$

где  $\lambda_1/\lambda_2$  есть произвольный параметр. где  $\mu_1/\mu_2$  есть произвольный параметр.

Доказательство (результата, стоящего слева) следует из того факта, что любая точка  $(x_1, x_2, x_3)$  прямолинейного ряда должна удовлетворять соотношению

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

В этом случае существуют три числа  $\rho, \lambda'_1, \lambda'_2$  такие, что

$$\rho x_i = \lambda'_2 a_i + \lambda'_1 b_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Число  $\rho$  отлично от нуля, ибо если бы оно было равно нулю, то из последнего соотношения следовало бы, что  $a_1:a_2:a_3 = b_1:b_2:b_3$ , а это означало бы, что точки  $A$  и  $B$  совпадают. Если поэтому мы положим  $\lambda_1 = \lambda'_1/\rho$  и  $\lambda_2 = \lambda'_2/\rho$ , то увидим, что любая точка прямолинейного ряда может быть представлена в указанном виде. Обратно, каждая точка, которая может быть представлена в таком виде, есть точка нашего прямолинейного ряда.

Описанный нами метод выражения элементов ряда точек (пучка прямых) называется *параметрическим*, причем точки  $A, B$  (прямые  $m, n$ ) называют *базисными точками* (*базисными прямыми*). Параметр  $\lambda_1/\lambda_2$  может быть взят также и в неоднородной форме  $\lambda_1/\lambda_2 = \lambda$ , что в некоторых случаях является более удобным. При такой записи точка  $P$  представляется в виде

$$P = (a_1 + \lambda b_1, a_2 + \lambda b_2, a_3 + \lambda b_3).$$

При первом способе записи параметра точки  $A$  и  $B$  отвечают значениям  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = 0$  соответственно; при втором способе точкам  $A$  и  $B$  отвечают значения  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$  соответственно. Так как каждому значению параметра  $\lambda$  соответствует некоторая определенная точка ряда, и обратно,

то мы можем говорить о точке  $\lambda$  (или, в случае пучка прямых, о прямой  $\mu$ ).

Условие того, что точка  $\lambda$  прямолинейного ряда точек лежит на прямой  $\mu$  пучка прямых, выражается соотношением

$$\sum (m_i + \mu n_i) (a_i + \lambda b_i) = 0.$$

Если мы развернем стоящее в левой части выражение, то сможем представить это уравнение в виде

$$C\mu\lambda + D\mu - A\lambda - B = 0,$$

где коэффициенты  $A, B, C, D$  зависят только от координат базисных точек прямолинейного ряда и базисных прямых пучка и не зависят от параметров других точек ряда. Последнее соотношение может быть записано в виде

$$\mu = \frac{A\lambda + B}{C\lambda + D}.$$

Это — условие перспективности прямолинейного ряда точек пучку прямых. Поскольку любое проективное соответствие между двумя образами первой ступени может быть получено как результат ряда последовательных перспектив и так как произведение двух дробно-линейных преобразований приведенного выше вида равносильно преобразованию того же вида, то мы, таким образом, доказали теорему:

*Всякое проективное соответствие между элементами двух образов первой ступени может быть представлено соотношением*

$$\mu = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

*между параметрами обоих образов.*

То же соотношение, конечно, представляет собой также и проективное соответствие в одном и том же образе первой ступени, если  $\mu$  и  $\lambda$  суть соответственные значения параметров образа.

Если два образа отличны друг от друга, то полученное выше общее соотношение может быть существенно упрощено путем надлежащего выбора базисных элементов. Возьмем в качестве примера два прямолинейных ряда точек на различных прямых, и пусть  $A$  и  $B$  будут произвольно выбранные базисные точки одного из этих рядов. В качестве базис-

ных точек второго ряда возьмем точки  $A'$  и  $B'$ , соответствующие точкам  $A$  и  $B$  в данном проективном соответствии. Тогда значениям  $\lambda=0$  и  $\lambda=\infty$  должны соответствовать значения  $\mu=0$  и  $\mu=\infty$ . Общее выражение проективного соответствия, полученное нами в доказанной выше теореме, приводится в этом случае к виду  $\mu=k\lambda$ .

**59. Уравнение конического сечения.** Воспользуемся соображениями предыдущего параграфа, чтобы получить уравнение конического сечения. Если  $m=m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3=0$  и  $n=n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=0$  суть уравнения двух различных прямых, то уравнение любой прямой пучка, определяемого прямыми  $m$  и  $n$ , будет иметь вид  $m+\lambda n=0$ . Положим, что коническое сечение образовано двумя проективными пучками прямых таким образом, что прямая  $m$  первого из них соответствует прямой  $p$  второго, а прямая  $n$  первого соответствует прямой  $q$  второго. Оба пучка могут быть тогда представлены соотношениями

$$m+\lambda n=0 \quad \text{и} \quad p+\mu q=0,$$

где  $p=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3$  и  $q=q_1x_1+q_2x_2+q_3x_3$ . Проективное соответствие, порождающее коническое сечение, определяется соотношением  $\mu=k\lambda$ . Чтобы получить уравнение конического сечения, остается только исключить  $\mu$  и  $\lambda$  из трех последних соотношений. Это приводит нас к искомому уравнению

$$np - kmq = 0,$$

которое в раскрытом виде, очевидно, представляет собой уравнение второй степени относительно  $x_1, x_2, x_3$ .

Если принять две касательные к данному нам коническому сечению за стороны  $x_1=0$  и  $x_3=0$  координатного треугольника, а прямую, соединяющую точки касания, — за его третью сторону  $x_2=0$ , то уравнение конического сечения примет простую форму  $x_2^2 - kx_1x_3=0$ ; если, кроме того, мы выберем в качестве точки  $(1, 1, 1)$  произвольную точку конического сечения, отличную от обеих точек касания, то уравнение приобретает особенно простую форму  $x_2^2 - x_1x_3=0$ .

**60. Коллинеации на плоскости.** В заключение настоящей главы покажем, как можно выразить аналитически произволь-

ную коллинеацию. С этой целью мы рассмотрим общее линейное преобразование однородных координат точек на плоскости:

$$\begin{aligned}\rho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Такого рода преобразование, очевидно, преобразует каждую точку  $(x_1, x_2, x_3)$  в определенную точку  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ . Обратно, оно относит точке  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  единственную точку  $(x_1, x_2, x_3)$ , если определитель преобразования

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. В самом деле, в этом случае система (1) допускает единственное решение, выражающее координаты  $(x_1, x_2, x_3)$  через  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ . Далее, легко видеть, что наше преобразование переводит любую прямую плоскости снова в прямую. Наконец, оно преобразует любой пучок прямых в проективный ему пучок прямых. В самом деле, если оно преобразует прямые  $m=0$  и  $n=0$  в две другие прямые, уравнения которых суть соответственно  $m'=0$  и  $n'=0$ , то ясно, что оно преобразует прямую  $m + \lambda n = 0$  в прямую  $m' + \lambda n' = 0$ , а это соотношение между двумя пучками, как уже было показано, выражает проективное соответствие (стр. 143).

Всякое преобразование вида (1) представляет собой, следовательно, при условии, что  $A \neq 0$ , проективную коллинеацию на плоскости. Обратно, всякая проективная коллинеация на плоскости может быть представлена в такой форме. Для доказательства этого необходимо только показать, что вершины полного четырехугольника при помощи такого преобразования могут быть преобразованы в вершины любого другого полного четырехугольника. Но если точки  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$  и  $(1, 1, 1)$  соответствуют точкам  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$ ,  $(c_1, c_2, c_3)$  и  $(d_1, d_2, d_3)$ , также образующим полный четырехугольник, то коэффициенты  $a_{ij}$  опре-



деляются однозначно (до множителя пропорциональности); это доказывается весьма просто с помощью элементарных алгебраических соображений.

Если прямая  $x_3 = 0$  остается при нашем преобразовании инвариантной, то, очевидно,  $a_{31} = a_{32} = 0$ . Если эта прямая есть особая прямая нашей системы неоднородных координат,  $x = x_1/x_3$  и  $y = x_2/x_3$ , то мы получим следующий результат, который, как мы увидим, понадобится нам в гл. IX:

*Если особая прямая системы неоднородных координат на плоскости остается инвариантной при некоторой коллинеации, то эта коллинеация может быть выражена уравнениями*

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2. \end{aligned} \quad (a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$$

## ГРУППЫ И ГЕОМЕТРИИ

**61. Определение геометрии с помощью группы преобразований.** Феликс Клейн в своей знаменитой Эрлангенской программе 1872 г., озаглавленной „Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований“, сформулировал принцип, имеющий основоположное значение и ставший с тех пор классическим в геометрии. Этот принцип заключается в следующем: если имеется некоторая группа  $G$  преобразований (геометрических элементов), то система определений и теорем, выражающих свойства, инвариантные по отношению к преобразованиям группы  $G$  (но не являющиеся инвариантами по отношению к любой другой группе преобразований, содержащей группу  $G$ ), образует *геометрию, связанную с группой  $G$  или определяемую группой  $G$* . Так, проективная геометрия на плоскости представляет собой геометрическую систему, определяемую группой всех проективных коллинеаций на плоскости; совокупность определений и теорем плоской проективной геометрии выражает свойства, инвариантные относительно общей группы коллинеаций на плоскости.

Эти свойства носят очень общий характер; они не содержат знакомых нам из элементарной евклидовой геометрии понятий параллельности, перпендикулярности, равенства расстояний или углов и т. п., так как эти свойства не являются инвариантами по отношению к преобразованиям общей проективной группы. Эти более специальные свойства являются инвариантами по отношению к более узкой группе преобразований, а именно, эти свойства инвариантны относительно группы всех движений на плоскости.

Любое перемещение или движение на плоскости в обыкновенной системе прямоугольных координат аналитически

выражается уравнениями

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta - y \sin \theta + h, \\y' &= x \sin \theta + y \cos \theta + k.\end{aligned}$$

Эти уравнения показывают, что группа перемещений содержится в качестве подгруппы в группе всех проективных коллинеаций; в самом деле, это есть подгруппа группы коллинеаций, оставляющих инвариантной заданную прямую (стр. 145). Вообще говоря, конечно, очевидно, что чем уже будет группа преобразований, тем большее количество свойств должно оказаться по отношению к ней инвариантными. Это ставит перед нами задачу изучения геометрий, связанных с каждой из подгрупп общей проективной группы на плоскости; в силу сказанного выше, мы должны рассчитывать найти среди этих геометрий элементарную евклидову геометрию. Дело, однако, обстоит несколько иначе: то, что обычно понимают под термином *евклидова геометрия*, представляет собой, в строгом смысле приведенного выше определения, смесь нескольких геометрий. Было бы интересно рассмотреть детально некоторые из наиболее важных подгрупп общей проективной группы и характеризуемые ими геометрии и таким путем точно установить, к какой именно подгруппе относится та или иная теорема евклидовой геометрии. Это, однако, было бы слишком обширной программой для краткого сочинения. Читателю, интересующемуся более полным и систематическим изложением этой точки зрения, мы можем рекомендовать книгу Веблена и Юнга, *Проективная геометрия*, т. II\*. В настоящем сочинении мы рассчитываем только обрисовать в общих чертах некоторые из главных результатов этих исследований и, таким образом, дополнить соображения относительно метрических свойств, данные в гл. VI. Тем не менее, того, что об этом будет здесь сказано, мы надеемся, будет достаточно, чтобы читатель мог уяснить себе новую точку зрения и на немногих примерах уяснить себе группы, к которым принадлежат отдельные знакомые ему понятия евклидовой геометрии. Мы увидим также, как на базе этой теоретико-групповой точки зрения возникают две главные, так называемые неевклидовы геометрии.

\* O. Veblen and J. W. Young, *Projective Geometry*, т. II, Бостон — Нью-Йорк, 1918.

**62. Аффинная группа. Аффинная геометрия.** Мы начнем наши рассуждения с группы всех коллинеаций на плоскости, оставляющих инвариантной заданную прямую; выше мы так определили (стр. 117) *аффинную группу*. Геометрия, связанная с этой группой, называется *аффинной геометрией* (на плоскости). Прямую, остающуюся неизменной при любой коллинеации нашей группы, мы назовем *бесконечно удаленной прямой* и обозначим ее через  $l_\infty$ . Читатель должен помнить, что это есть не что иное, как определение; прямой  $l_\infty$  может служить любая прямая плоскости. Нет необходимости обязательно мыслить эту прямую как „удаленную в бесконечность“; только если мы хотим, чтобы получающаяся из этих допущений геометрия совпадала интуитивно с обычной элементарной геометрией, т. е. если мы желаем, чтобы образы этой геометрии выглядели как знакомые нам фигуры, мы должны мыслить прямую  $l_\infty$  находящейся в бесконечности.

Точки прямой  $l_\infty$  называются *бесконечно удаленными* или *идеальными* или *несобственными точками*; точки же, не лежащие на прямой  $l_\infty$ , мы будем, следовательно, называть *обыкновенными точками*, и все прямые на плоскости, за исключением прямой  $l_\infty$ , — *обыкновенными прямыми*. Обыкновенные точки и прямые на плоскости образуют *эвклидову плоскость*\*; в дальнейшем, когда мы будем употреблять просто слово „точка“, мы будем иметь в виду обыкновенные точки.

Основная теорема аффинной группы, которую мы приводим здесь без доказательства, гласит: *существует одно и только одно преобразование аффинной группы, преобразующее вершины  $A, B, C$  произвольного треугольника соответственно в вершины  $A', B', C'$  любого другого треугольника*. Мы видели уже (стр. 145), что в системе неоднородных координат, в которой прямая  $l_\infty$  играет роль особенной прямой, любая аффинная коллинеация выражается соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \end{aligned} \quad \text{где } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

---

\* Чаше под эвклидовой плоскостью разумеют метрическую плоскость с эвклидовой геометрией; то, что автор называет здесь эвклидовой плоскостью, можно было назвать *аффинной плоскостью*. (Прим. ред.)

Мы дадим теперь некоторые определения, по существу те же самые, которые были даны нами в начале гл. VI; поэтому нет необходимости повторять их во всех деталях. Две обыкновенные прямые, не пересекающиеся ни в какой обыкновенной точке, называются *параллельными*; пара таких прямых называется парой *параллелей*. Простой четырехугольник  $ABCD$ , стороны которого  $AB$  и  $CD$ , а также  $BC$  и  $DA$ , попарно параллельны между собой, называется *параллелограммом*, а прямые  $AC$  и  $BD$  — его *диагоналями*. Следующая теорема представляет собой непосредственное следствие этих определений и проективных теорем:

*В евклидовой плоскости две различные точки определяют одну и только одну прямую; две прямые либо пересекаются в некоторой точке, либо параллельны между собой; две прямые, параллельные порою одной и той же третьей прямой, параллельны между собой; через каждую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной прямой.*

Классификация конических сечений (их разделение на *гиперболы*, *параболы* и *эллипсы*), определения *центра*, *диаметра*, *центрального конического сечения*, *асимптот* (гиперболы) — все это понятия, принадлежащие аффинной геометрии, но не имеющие содержания в общей проективной геометрии. Мы перейдем теперь к развитию некоторых новых понятий аффинной группы.

**63. Группа параллельных перенесений.** Особенная гомология (стр. 115), имеющая своей осью прямую  $l_\infty$ , называется *параллельным перенесением*. Если  $l$  есть обыкновенная прямая, проходящая через центр параллельного перенесения, то говорят, что это перенесение происходит *параллельно* прямой  $l^*$ .

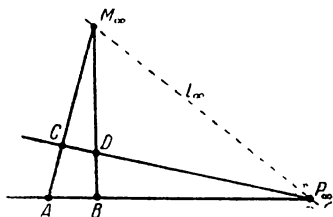
Мы видели уже, что совокупность всех параллельных перенесений образует группу. Более того, очевидно, что

\* Таким образом, при параллельном перенесении каждая прямая переходит в параллельную ей прямую, пучок параллельных прямых переходит в пучок параллельных же прямых, поскольку бесконечно удаленная прямая остается инвариантной; но, сверх того, определенный пучок параллелей, проходящий через бесконечно удаленный центр гомологии, сохраняет свое направление; это и есть направление перенесения. (Прим. ред.).

группа параллельных перенесений инвариантна (стр. 108) по отношению к аффинной группе. Читатель без труда усмотрит, что любое параллельное перенесение преобразует каждую обыкновенную прямую в параллельную ей прямую, а совокупность параллельных между собой прямых — в самое себя. Точно так же из определения параллельного перенесения легко следует, что *существует одно и только одно параллельное перенесение, преобразующее некоторую точку  $A$  в заданную точку  $B$ .*

Две фигуры, соответствующие друг другу в параллельном перенесении, называются *параллельно конгруэнтными*. Позднее мы дадим более общее определение конгруэнтности. Но и это ограниченное определение выражает тот факт, что конгруэнтность, понимаемая в этом смысле, инвариантна по отношению к аффинной геометрии. То, что это свойство действительно инвариантно по отношению к аффинной группе, следует непосредственно из того, что аффинная группа преобразует группу параллельных перенесений в самое себя.

*Необходимое и достаточное условие для того, чтобы две ориентированные пары точек  $A, B$  и  $C, D$  были параллельно конгруэнтны, состоит в том, чтобы четырехугольник  $ABCD$*



Фиг. 62

*представлял собой параллелограм. При этом, впрочем, предполагается, что точка  $C$  не лежит на прямой  $AB$ . Если же точка  $C$  лежит на прямой  $AB$  и  $P_\infty$  есть бесконечно удаленная точка этой прямой, то искомое условие заключается в том, чтобы параболическое соответствие с двойной точкой  $P_\infty$ , преоб-*

*разующее точку  $A$  в  $C$ , преобразовало бы также точку  $B$  в точку  $D$ .*

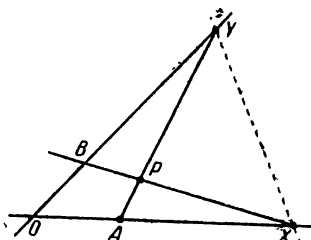
Первая часть теоремы следует прямо из построения параллельного перенесения, преобразующего точку  $A$  в  $C$  (фиг. 62). Прямая  $AC$  остается инвариантной, а прямая  $AB$  преобразуется в прямую  $CP_\infty$ , где  $P_\infty$  есть бесконечно удаленная точка прямой  $AB$ . Вместе с тем, точка  $B$  преобразуется в точку  $D$  пересечения прямой  $CP_\infty$  с прямой  $BM_\infty$ ,

соединяющей точку  $B$  с центром параллельного перенесения  $M_\infty$ . При этих условиях четырехугольник  $ABCD$  есть параллелограмм. Вторая часть теоремы следует из того, что проективное соответствие на всякой инвариантной прямой должно быть параболическим (стр. 117) с двойной точкой в бесконечности.

В качестве частного случая последней теоремы имеем:

*Если  $A$  и  $B$  суть две различные точки, а точка  $M$  гармонически сопряжена с бесконечно удаленной точкой прямой  $AB$  относительно точек  $A$  и  $B$ , то ориентированные пары точек  $A, M$  и  $M, B$  параллельно конгруэнтны.*

Эта теорема оправдывает данное выше определение *середины* отрезка (стр. 85). Ясно также, что теорема, согласно которой прямая, соединяющая середины двух сторон треугольника, параллельна третьей его стороне, — как и предложение, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (стр. 87), — принадлежат аффинной геометрии; это относится и к предложению о том, что диагонали параллелограмма делят друг друга пополам, и к теореме о серединах хорд конического сечения и другим предложениям, доказанным нами в гл. VI (стр. 89).



Ф и г. 63

*Если  $OX$  и  $OY$  суть две непараллельные прямые и  $T$  есть некоторое параллельное перенесение, то существует одна и только одна пара перенесений  $T_1, T_2$  параллельных прямым  $OX$  и  $OY$  соответственно, произведение которых  $T_1 T_2$  равно  $T$ .*

Для доказательства этой теоремы положим, что параллельное перенесение  $T$  преобразует точку  $O$  в точку  $P$ , и пусть прямые, проходящие через точку  $P$  параллельно прямым  $OY$  и  $OX$ , пересекают прямые  $OX$  и  $OY$  соответственно в точках  $A$  и  $B$  (фиг. 63). Тогда если  $T_1$  есть параллельное перенесение, переводящее точку  $O$  в точку  $A$ , а  $T_2$  — перенесение, переводящее точку  $O$  в точку  $B$ , то из полученных ранее результатов непосредственно следует:  $T_1 T_2 = T$ . Доказательство того, что такая пара параллельных

перенесений  $T_1, T_2$  является единственной, не представляет затруднений.

Мы воспользуемся последней теоремой, чтобы получить аналитическое выражение параллельного перенесения. Ясно, что в системе неоднородных координат, для которой  $l_\infty$  служит особенной прямой, перенесение, параллельное оси  $x$ -ов, выражается уравнениями  $x' = x + a, y' = y$ ; действительно, первое из этих уравнений, согласно определению сложения, представляет собой требуемое параболическое соответствие на оси  $x$ -ов, а второе уравнение выражает, что всякая прямая, параллельная оси  $x$ -ов, преобразуется в самое себя. Подобным же образом перенесение, параллельное оси  $y$ -ов, выражается уравнениями  $x' = x, y' = y + b$ . Последовательное применение этих двух параллельных перенесений, очевидно, приводит к следующему результату:

*В любой системе неоднородных координат, для которой прямая  $l_\infty$  служит особенной прямой, всякое параллельное перенесение выражается уравнениями*

$$\begin{aligned}x' &= x + a, \\y' &= y + b.\end{aligned}$$

Это показывает также, что группа параллельных перенесений коммутативна.

**64. Векторы.** Прежде чем закончить эту часть наших рассуждений, дадим определение еще одной важной группы образов, относящихся к аффинной геометрии. *Вектор  $AB$*  есть объект, который определяется заданием пары точек  $AB$ , взятых в определенном порядке, причем, по определению, для любой другой пары точек  $CD$  такой, что  $CD$  параллельно конгруэнтна паре  $AB$ , *вектор  $CD$*  полагается равным *вектору  $AB$* \*. Если точки  $A$  и  $B$  совпадают, то вектор называется *нулевым вектором* и обозначается символом  $0$ .

---

\* Может быть, будет яснее, если формулировать ту же мысль следующим образом. С каждой ориентированной парой точек  $A$  и  $B$  связывается некоторый геометрический объект, называемый вектором  $AB$ ; при этом два вектора  $AB$  и  $CD$  принимаются равными в том и только в том случае, если пара точек  $CD$  параллельно конгруэнтна паре  $AB$ . (Прим. ред.)

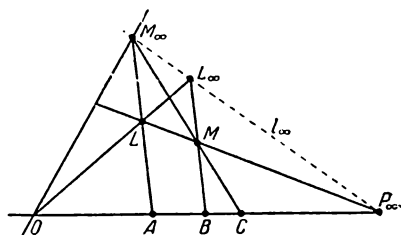


Мы будем обозначать вектор  $AB$  символом  $V(AB)$ . Так как любая точка евклидовой плоскости может быть преобразована в любую другую точку той же плоскости при помощи параллельного перенесения, то совокупность всех вообще векторов на плоскости не отличается от совокупности всех векторов вида  $V(OP)$ , где  $O$  есть фиксированная точка плоскости, а  $P$  — переменная точка.

Если  $O, A, C$  суть три любые точки плоскости, то вектор  $V(OC)$  называется *суммой* векторов  $V(OA)$  и  $V(AC)$ ; символически это обозначается записью  $V(OC) = V(OA) + V(AC)$ . Поскольку мы, очевидно, имеем  $V(AB) + V(BA) = 0$ , то мы определяем вектор  $V(BA)$  как вектор *противоположный* вектору  $V(AB)$  и пишем  $V(BA) = -V(AB)$ . Два вектора называются *коллинеарными* в том и только в том случае, когда они равны соответственно двум векторам  $V(OA)$  и  $V(OB)$ , где  $O, A, B$  суть три коллинеарные точки.

Под суммой двух неколлинеарных векторов  $OA$  и  $OB$  разумеют вектор  $OC$ , где  $C$  есть такая точка, что четырехугольник  $OACB$  есть параллелограмм. Это следует из определения и из того, что  $V(AC) = V(OB)$ .

Положим, что мы имеем три коллинеарные точки  $O, A, B$ , и пусть  $P_\infty$  есть бесконечно удаленная точка прямой  $OA$ , а  $L_\infty$  и  $M_\infty$  — две другие различные точки прямой  $l_\infty$ ; пусть, далее, прямые  $OL_\infty$  и  $AM_\infty$  пересекаются в точке  $L$ , а прямые  $BL_\infty$  и  $LP_\infty$  — в точке  $M$  (фиг. 64). Если прямая  $MM_\infty$  пересекает прямую  $OA$  в точке  $C$ , то четырехугольники  $OBML$  и  $ACML$  представляют собой параллелограммы, так что  $V(OB) = V(LM) = V(AC)$ . Отсюда, согласно определению, имеем  $V(OA) + V(OB) = V(OC)$ . Но из построения, с помощью которого мы получим точку  $C$ , следует, что точка эта представляет собой сумму точек  $A$  и  $B$  в алгебре точек на прямой  $OA$ , в которой точка  $O$  есть точка  $0$ , а  $P_\infty$  — точка  $\infty$ . Это доказывает, что сложение коллинеар-



Ф и г. 64

ных векторов, проведенных из точки  $O$ , эквивалентно сложению конечных точек этих векторов в алгебре точек, в которой  $O$  служит точкой  $0$ , а бесконечно удаленная точка прямой  $OA$  — точкой  $\infty$ .

Кроме того, легко видеть, что сложение векторов обладает свойствами ассоциативности и коммутативности, иными словами, если  $a, b, c$  суть векторы, то  $(a + b) + c = a + (b + c)$  и  $a + b = b + a$ .

Отношение  $OA/OB$  двух коллинеарных векторов  $OA$  и  $OB$  есть число, соответствующее точке  $A$  в шкале, определяемой точками  $O=0, B=1$  и  $P_\infty=\infty$ , где  $P_\infty$  есть бесконечно удаленная точка прямой  $OA$ . Если фиксировать произвольно выбранный вектор  $OB$  и назвать его *единичным вектором*, то отношение  $OA/OB$  коллинеарных векторов называется *величиной\** вектора  $V(OA)$ . Величина вектора  $V(OA)$  имеет, очевидно, то же численное значение, что и координата точки  $A$  в упомянутой выше шкале. Обозначая величину вектора  $V(OA_i)$  через  $a_i$ , мы будем, очевидно, иметь, что величина вектора  $V(A_1A_2)=a_2 - a_1$ . Отсюда сейчас же получается следующая теорема (стр. 130):

Если  $A_1, A_2, A_3, A_4$  суть четыре коллинеарных точки, то

$$\Re(A_1A_2, A_3A_4) = \frac{A_1A_3}{A_1A_4} \cdot \frac{A_2A_3}{A_2A_4}.$$

Если  $A_1=A_\infty$  есть бесконечно удаленная точка прямой, то мы имеем

$$\Re(A_\infty A_2, A_3 A_4) = \frac{A_2 A_4}{A_2 A_3}.$$

В качестве приложения этого результата мы докажем следующую теорему:

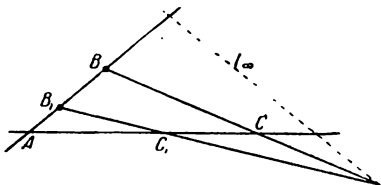
---

\* Величина (или длина) вектора определяется, таким образом, единицей, установленной на прямой, с которыми он коллинеарен. На различных прямых единичные векторы могут быть выбраны независимо один от другого; длиной вектора на одной прямой не определяется длина неколлинеарного с ним вектора. Этим величина (или длина) вектора в аффинной геометрии отличается от длины в метрической геометрии, где избранием единицы на одной прямой уже определяется длина любого вектора. См. также стр. 164. (Прим. ред.)

Если стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  треугольника  $ABC$  параллельны соответственно сторонам  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'A'$  другого треугольника  $A'B'C'$ , то

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Этот частный случай хорошо известной теоремы принадлежит аффинной геометрии. Для доказательства этого предложения необходимо только заметить, что параллельное перенесение, переводящее точку  $A'$  в  $A$ , переводит точку  $B'$  в  $B_1$  и точку  $C'$  в  $C_1$ , причем точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат соответственно на прямых  $AB$  и  $AC$ . Следовательно, в этом случае мы имеем\*



Фиг. 65

$$B_{\infty}ABB_1 \bar{\wedge} C_{\infty}ACC_1,$$

откуда  $\Re(B_{\infty}A, BB_1) = \Re(C_{\infty}A, CC_1)$  или  $AB/AB_1 = AC/AC_1 = CA/C_1A$ , что, согласно определению, дает  $AB/A'B' = CA/C'A'$ . Подобным же образом доказывается и оставшаяся часть теоремы.

Поскольку величины векторов определены нами как числа, мы можем производить над ними вычисления согласно правилам алгебры. Более того, никакой путаницы не произойдет, если мы будем обозначать величину вектора  $AB$  просто символом  $AB$ ; отношение двух векторов будет просто частным от деления их величин.

В заключение этой части настоящей главы мы весьма просто докажем общую теорему относительно проективных соответствий, частный случай которой был получен нами выше при помощи других методов. Для доказательства этой теоремы мы нуждаемся в следующем определении. Если  $T$  есть некоторое проективное соответствие между точками двух прямых  $l$  и  $l'$  и если точки  $I$  и  $J'$  в преобразованиях  $T^{-1}$  и  $T$  соответствуют бесконечно удаленным точкам прямых  $l$  и  $l'$  и представляют собой обыкновенные точки, то

\*  $E_{\infty}$  есть бесконечно удаленная точка прямой  $AB$ ,  $C_{\infty}$  есть бесконечно удаленная точка прямой  $AC$ . (Прим. ред.)

они называются *исчезающими точками\** прямых  $l$  и  $l'$  соответственно. Прямые  $l$  и  $l'$  могут совпадать. Теорема, о которой идет речь, заключается в следующем:

*Если  $I$  и  $J'$  суть соответственно исчезающие точки двух параллельных прямых  $l$  и  $l'$  в проективном соответствии  $T$  между точками этих прямых, и если  $P$  есть переменная точка прямой  $l$ , а  $P' = T(P)$  — соответствующая ей точка прямой  $l'$ , то произведение (величин или длин)  $IP \cdot J'P'$  есть величина постоянная, называемая степенью проективного соответствия.*

Доказательство этой теоремы заключается в следующем. Пусть  $P_\infty$  есть бесконечно удаленная точка прямых  $l$  и  $l'$ , пусть, далее,  $P_1$  и  $P_2$  будут два значения точки  $P$ , а  $P'_1 = T(P_1)$  и  $P'_2 = T(P_2)$  — соответствующие им значения точки  $P'$ . Тогда, в силу основного свойства (стр. 131) сложного отношения, мы имеем

$$\Re(P_\infty I, P_1 P_2) = \Re(J' P_\infty, P'_1 P'_2) = \Re(P_\infty J', P'_2 P'_1),$$

откуда

$$\frac{IP_2}{IP_1} = \frac{J'P'_1}{J'P'_2}.$$

Рассматривая последнее выражение как отношение величин векторов, будем иметь

$$IP_2 \cdot J'P'_2 = IP_1 \cdot J'P'_1.$$

Если некоторая инволюция на прямой не оставляет неизменной бесконечно удаленную точку этой прямой, то исчезающая точка этой инволюции называется ее *центром* (стр. 98). В качестве следствия доказанной выше теоремы имеем:

*Если  $O$  есть центр инволюции на прямой, а  $P$  и  $P'$  — пара точек этой инволюции, то произведение  $OP \cdot OP'$  есть величина постоянная (стр. 99).*

\* Пусть  $L$  и  $L'$  — бесконечно удаленные точки прямых  $l$  и  $l'$ . Преобразование  $T$  переводит прямую  $l$  в  $l'$  и ее точку  $L$  в некоторую точку  $J'$  прямой  $l'$ ;  $T(L) = J'$ . Обратное преобразование  $T^{-1}$  переводит прямую  $l'$  в  $l$  и точку  $L'$  — в некоторую точку  $I$  прямой  $l$ ;  $T^{-1}(L') = I$ . Если точки  $I$  и  $J'$  не лежат на бесконечно удаленной прямой, то автор называет их *исчезающими точками* прямых  $l$  и  $l'$  по отношению к преобразованию  $T$ . Это название не является общепринятым. (Прим. ред.)

**65. Эвклидова метрическая группа. Эвклидова метрическая геометрия.** Мы можем теперь определить подгруппу аффинной группы, характеризующую эвклидову метрическую геометрию. Как можно ожидать на основании рассмотрения свойства перпендикулярности в гл. VI (стр. 89), определение этой подгруппы должно заключать в себе инволюцию на бесконечно удаленной прямой. В самом деле, мы поступаем просто следующим образом.

Пусть  $I$  есть произвольная, но определенная эллиптическая инволюция на прямой  $l_\infty$ , которую мы назовем *абсолютной* или *ортогональной* инволюцией. Наши дальнейшие рассуждения будут значительно более простыми, если мы будем рассматривать эту инволюцию как имеющую две мнимые двойные точки  $I_1$  и  $I_2$ , которые мы будем называть *бесконечно удаленными циклическими точками*. Группа всех проективных коллинеаций, оставляющих неизменной инволюцию  $I$ , называется *эвклидовой метрической группой*, а связанная с этой группой геометрия — *эвклидовой метрической геометрией*. Преобразования эвклидовой метрической группы называются *преобразованиями подобия*; две фигуры, соответствующие друг другу в преобразованиях этой группы, называются *подобными*.

Что касается существования коллинеаций, оставляющих неизменной абсолютную инволюцию, то мы можем заметить, что любая такая коллинеация должна либо оставлять неизменной каждую из циклических точек  $I_1, I_2$ , либо просто заменять точки  $I_1, I_2$  друг другом; и обратно, любая коллинеация, обладающая одним из этих свойств, должна оставлять абсолютную инволюцию неизменной. Преобразования подобия первого рода называются *прямыми*, а второго — *обращенными*.

Мы определим теперь *перпендикулярные* прямые как прямые, проходящие через две сопряженные точки инволюции  $I$  (стр. 89). Из этого определения немедленно следует:

*Пары перпендикулярных прямых в пучке прямых суть пары эллиптической инволюции. Через каждую точку плоскости проходит одна и только одна прямая, перпендикулярная данной прямой. Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна также*

и к другой. Две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, параллельны между собой.

Основными преобразованиями для построения евклидовой метрической группы являются так называемые *ортогональные линейные отражения*, т. е. гармонические гомологии с центром  $L$ , лежащим на бесконечно удаленной прямой, и осью, пересекающей прямую  $l_\infty$  в точке, сопряженной с точкой  $L$  в абсолютной инволюции. Из этого определения ясно, что центр ортогонального линейного отражения не может совпадать с циклической точкой, равно как и ось его не может проходить через такую точку. Точно так же из определения непосредственно следует, что ортогональное линейное отражение преобразует каждую точку  $P$  в точку  $P'$  такого рода, что прямая  $PP'$  перпендикулярна к оси преобразования и точка ее пересечения с этой осью есть середина отрезка  $PP'$ .

**66. Ортогональная система координат.** Положим, что нам даны на бесконечно удаленной прямой две точки  $X_1, Y_1$ , сопряженные между собой в абсолютной инволюции; тогда на прямой  $l_\infty$  существуют две другие точки  $U, U'$ , сопряженные между собой в инволюции  $I$  и образующие с точками  $X_1, Y_1$  гармоническую четверку. Примем точки  $X_1, Y_1$  за точки  $(1, 0, 0)$  и  $(0, 1, 0)$  однородной системы координат, а  $U$  и  $U'$  — за точки  $(1, 1, 0)$  и  $(-1, 1, 0)$  соответственно. Пусть точка  $O = (0, 0, 1)$  будет некоторая обыкновенная точка плоскости. Тогда, очевидно, возможно выбрать точку  $(1, 1, 1)$  в соответствии со сделанным уже выбором трех основных точек ( $X_1, Y_1$  и  $O$ ). Если теперь мы обычным путем перейдем от однородной системы координат к неоднородной, в которой прямая  $l_\infty$  служит особенной прямой, а прямые  $OX_1$  и  $OY_1$  — соответственно осью  $x$ -ов и осью  $y$ -ов, то последние будут перпендикулярными друг к другу, а абсолютная инволюция будет выражаться уравнениями  $x_1' = -x_2$ ,  $x_2' = x_1$ ,  $x_3' = x_3 = 0$ . Отсюда следует, что прямые  $y = mx$  и  $y = m'x$  будут перпендикулярными друг к другу в том и только в том случае, если  $m' = 1/m$ . В более общем выражении, две прямые  $ax + by + c = 0$  и  $a'x + b'y + c' = 0$  будут перпендикулярными друг к другу тогда и только тогда, когда  $ab' + ba' = 0$ . Установленная нами таким образом

система неоднородных координат называется *ортогональной системой координат*.

**67. Аналитическое выражение преобразований эвклидовой группы.** Полученные нами в п. 60 аналитические выражения для преобразований аффинной группы могут быть записаны в однородной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3, \\ \rho x'_2 &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3, \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0) \\ \rho x'_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Циклические точки  $I_1, I_2$  имеют координаты  $(i, 1, 0)$  и  $(-i, 1, 0)$ , где  $i^2 = -1$ . Если принять во внимание, что коэффициенты коллинеации имеют действительные значения (коллинеации преобразуют все действительные точки в действительные же), то из условия, что точка  $(i, 1, 0)$  остается неизменной, легко следует:  $b_2 = a_1$  (мы обозначим  $b_2 = a_1$  через  $\alpha$ ) и  $a_2 = -b_1$  (мы обозначим  $a_2 = -b_1$  через  $\beta$ ). Это приводит к следующему результату:

*Всякое прямое преобразование подобия выражается соотношениями*

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta y + h, \\ y' &= \beta x + \alpha y + k. \end{aligned} \quad (\Delta = \alpha^2 + \beta^2 > 0)$$

Подобным же образом условие того, что точка  $(i, 1, 0)$  преобразуется в точку  $(-i, 1, 0)$ , дает  $a_1 = -b_2 = \alpha$  и  $a_2 = b_1 = \beta$ . Отсюда имеем:

*Всякое обращенное подобие выражается соотношениями*

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + h, \\ y' &= \beta x - \alpha y + k. \end{aligned} \quad (\Delta = -\alpha^2 - \beta^2 < 0)$$

Очевидно, что произведение двух обращенных преобразований представляет собой прямое преобразование. Это подтверждается тем обстоятельством, что определитель произведения двух коллинеаций равен произведению их определителей, а произведение двух отрицательных чисел есть число положительное.

Что касается ортогонального линейного отражения, то мы легко можем получить дополнительное условие, которому должны удовлетворять коэффициенты нашего преобразования.

Положим сначала, что ось ортогонального линейного отражения проходит через начало координат. Это означает, что точка  $(0, 0)$  остается неизменной. Так как ортогональное линейное отражение представляет собой обращенное преобразование, то оно может быть представлено в виде

$$x' = \alpha x + \beta y, \quad y' = \beta x - \alpha y. \quad (1)$$

Если другая точка  $(m, n)$  на оси остается неизменной, то это означает, что наше преобразование представляет собой ортогональное линейное отражение. Это дает соотношения  $m = \alpha m + \beta n$ ,  $n = \beta m - \alpha n$ . Отсюда получаем для  $\alpha$  и  $\beta$  значения

$$\alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \quad \beta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}. \quad (2)$$

Вместе с тем непосредственно видно, что  $\Delta = -\alpha^2 - \beta^2 = -1$ . Обратно, если нам дано преобразование типа (1), для которого  $-\alpha^2 - \beta^2 = -1$ , то можно определить числа  $m, n$  таким образом, чтобы имели место соотношения (2). Если мы преобразуем преобразование (1) с помощью параллельного перенесения  $x' = x + a$ ,  $y' = y + b$ , то получим в результате ортогональное линейное отражение с осью, параллельной оси преобразования (1). Если мы проделаем необходимые вычисления, то найдем, что

*Всякое ортогональное линейное отражение выражается уравнениями*

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + (\alpha - 1)a + \beta b, \\ y' &= \beta x - \alpha y + \beta a - (\alpha + 1)b. \end{aligned} \quad \begin{matrix} (-\alpha^2 - \beta^2 = -1) \\ \cancel{(\alpha^2 + \beta^2 = 1)} \end{matrix}$$

Мы можем в этих уравнениях, не нарушая их общности, положить  $b = 0$ , если только  $\beta$  не равно нулю; в последнем случае можно положить  $a = 0$ .

**68. Движения.** Произведение любого четного числа ортогональных линейных отражений называется *перемещением* или *движением*. Две фигуры, соответствующие одна другой в движении, называются *конгруэнтными*.

Ясно, что произведение любого четного числа ортогональных линейных отражений будет выражаться уравнениями.



вида

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta y + h, \\ y' &= \beta x + \alpha y + k. \end{aligned} \quad (\alpha^2 + \beta^2 = 1) \quad (1)$$

В самом деле, такое произведение должно быть прямым преобразованием и, следовательно, определитель его должен быть равен единице. Чтобы доказать, что всякое преобразование этого вида есть движение, мы покажем сначала, что всякое параллельное перенесение представляет собой произведение двух ортогональных линейных отражений с параллельными осями. Положим, что параллельное перенесение преобразует точку  $A$  в точку  $B$ , и пусть  $L_\infty$  есть бесконечно удаленная точка прямой  $AB$ . Тогда, если  $L'_\infty$  есть точка, сопряженная с точкой  $L_\infty$  в абсолютной инволюции, то произведение ортогональных линейных отражений, оси которых проходят через точку  $L'_\infty$ , будет представлять собой параллельное перенесение, так как оно оставляет неизменной каждую бесконечно удаленную точку. Если ортогональное линейное отражение с осью  $BL'_\infty$  переводит точку  $A$  в  $A'$ , то отражение, ось которого проходит через точку  $L'_\infty$  и через середину (отрезка)  $BA'$ , должно преобразовать точку  $A'$  в  $B$ . Произведение этих двух ортогональных линейных отражений представляет собой, следовательно, параллельное перенесение, переводящее точку  $A$  в точку  $B$ . Положим теперь, что  $D$  есть некоторое определенное преобразование вида (1), и пусть  $T$  есть параллельное перенесение  $x' = x + h$ ,  $y' = y + k$ . Тогда преобразование  $T^{-1}D$  будет выражаться уравнениями

$$x' = \alpha x - \beta y, \quad y' = \beta x + \alpha y. \quad (2)$$

Произведение двух ортогональных линейных отражений

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y, & y' &= \beta_1 x - \alpha_1 y, & (\alpha_1^2 - \beta_1^2 &= -\alpha_1^2 - \beta_1^2 = -1) \\ x' &= \alpha_2 x + \beta_2 y, & y' &= \beta_2 x - \alpha_2 y, & (\alpha_2^2 - \beta_2^2 &= -\alpha_2^2 - \beta_2^2 = -1) \end{aligned}$$

является преобразованием

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) x - (\beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2) y, \\ y' &= (\beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2) x + (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) y. \end{aligned}$$

Это преобразование будет эквивалентно преобразованию (2) в том случае, если

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = \alpha, \quad \beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2 = \beta.$$

Но мы всегда можем разрешить эти два уравнения относительно  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  и выразить их через  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ . Это показывает, что преобразование  $T^{-1}D$  есть произведение двух ортогональных линейных отражений, а отсюда следует, что преобразование  $D$  представляет собой произведение не более чем четырех ортогональных линейных отражений.

Движение, оставляющее неподвижной одну какую-либо обыкновенную точку, называется *вращением*. Предшествующие рассуждения показывают, что *всякое вращение, оставляющее неподвижным начало координат  $O$ , выражается уравнениями*

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta y, \\ y' &= \beta x + \alpha y. \end{aligned} \quad (\alpha^2 + \beta^2 = 1)$$

Из этих рассуждений следует также, что *любое движение может быть представлено как результат вращения вокруг начала координат и параллельного перенесения*.

Мы можем теперь показать, что любая точка  $(x_1, y_1)$  может быть переведена в точку оси  $x$ -ов при помощи вращения вокруг начала координат. В самом деле, если мы заменим в написанных выше уравнениях координаты  $(x', y')$  на  $(\lambda, 0)$ , а  $(x, y)$  на  $(x_1, y_1)$  и разрешим полученные уравнения относительно коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , то получим

$$\alpha = \frac{\lambda x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad \beta = -\frac{\lambda y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Так как  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , то это дает  $\lambda = \pm \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ . Это показывает, далее, что *существует одно и только одно вращение вокруг начала координат, переводящее точку  $(x_1, y_1)$  в точку  $(\lambda, 0)$  с положительным значением координаты  $\lambda$ , а также одно и только одно вращение вокруг начала, переводящее точку  $(x_1, y_1)$  в точку  $(\lambda, 0)$  с отрицательным значением координаты  $\lambda$ .*

Из сказанного следует также, что *единственное вращение (не являющееся тождеством), оставляющее неизменной прямую, проходящую через начало  $O$ , выражается уравнениями  $x' = -x, y' = -y$ .*

Произведение (любого) нечетного числа ортогональных линейных отражений называется *симметрией*. Ясно, что совокупность всех движений образует группу, инвариантную

относительно евклидовой метрической группы, и что совокупность всех движений и преобразований симметрии также образует группу, инвариантную относительно той же евклидовой метрической группы. Это оправдывает следующие определения: две фигуры, соответствующие друг другу в преобразовании движения, называются *конгруэнтными*; две фигуры, соответствующие друг другу в преобразовании симметрии, называются *симметричными*.

В качестве иллюстрации мы можем доказать одну из трех теорем о равенстве треугольников, с которых большая часть элементарных руководств начинает изучение геометрии.

*Если пара точек  $A, B$  конгруэнтна паре точек  $A', B'$  и если ориентированные пары прямых  $s, a$  и  $s', b'$  конгруэнтны соответственно парам прямых  $s', a'$  и  $s', b'$ , то треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  конгруэнтны, и притом так, что точка  $A$  соответствует точке  $A'$ , а точка  $B$  — точке  $B'$ .*

В условии теоремы буквой  $a$  обозначена, как это обычно делается, прямая  $BC$  и т. д.; мы воспользовались термином „ориентированная пара прямых“ вместо понятия „угол“, так как это последнее до сих пор не было определено. Согласно предположению, существует такое движение  $T$ , которое преобразует точку  $A$  в  $A'$  и точку  $B$  в  $B'$ . Положим, что  $T(a) = a''$ ,  $T(b) = b''$  и  $T(C) = C''$ . Если бы прямая  $a''$  была отлична от  $a'$  ( $a'' \neq a'$ ), то это означало бы, что пара  $s', a'$  конгруэнтна  $s', a''$ , и, следовательно, существовало бы движение, оставляющее неизменными точку  $B'$  и прямую  $s'$  и преобразующее прямую  $a'$  в  $a''$ . Если мы теперь будем рассматривать точку  $B'$  как точку  $O$  предыдущей теоремы (стр. 162), то это движение должно быть либо тождеством, либо вращением, о котором шла речь в предыдущей теореме. Но оба эти допущения противоречат предположению о том, что  $a'' \neq a'$ . Подобным же образом докажем, что  $b'' = b'$  и, следовательно,  $C'' = C'$ .

**69. Окружность.** В качестве еще одного примера мы можем дать определение окружности, согласное с обычным определением элементарной геометрии. Если  $O$  и  $A$  суть две различные точки, то *окружностью с центром  $O$  и радиусом  $OA$*  мы будем называть геометрическое место точек  $P$ , обладающих тем свойством, что  $OP$  конгруэнтно  $OA$ .

Примем точку  $O$  за начало системы прямоугольных координат, и пусть  $OA$  совпадает с положительным направлением оси  $x$ -ов. Тогда если  $a$  есть координата точки  $A$ , а  $(x, y)$  — координаты переменной точки  $P$ , то уравнение окружности будет  $x^2 + y^2 = a^2$  (стр. 162). Если центром окружности служит точка  $(h, k)$ , то параллельное перенесение  $x' = x + h$ ,  $y' = y + k$  преобразует нашу окружность в кривую

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2.$$

Уравнение окружности на плоскости имеет, следовательно, вид

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0.$$

Если мы напишем это уравнение в однородной форме, то сейчас же увидим, что обе циклические точки  $(i, 1, 0)$  и  $(-i, 1, 0)$  удовлетворяют любому уравнению этого вида. С другой стороны, любое (действительное) коническое сечение выражается уравнением второй степени с действительными коэффициентами. Если мы подчиним общее уравнение второй степени с действительными коэффициентами условию, чтобы оно удовлетворялось координатами циклических точек, то это будет означать, что оно должно иметь написанную выше форму. Отсюда *необходимое и достаточное условие для того, чтобы коническое сечение представляло собой окружность, заключается в том, чтобы оно содержало бесконечно удаленные циклические точки*. Это и служит основанием того, что двойные точки абсолютной инволюции называются *циклическими* точками.

**70. Расстояние.** Мы определили величину вектора как его отношение к коллинеарному с ним единичному вектору (стр. 154). Это понятие принадлежит аффинной геометрии. Но в этой геометрии не существует соотношений между величинами неколлинеарных векторов. Однако эвклидова метрическая группа даст возможность установить такое соотношение. Для этого необходимо только условиться в том, что любые два единичных вектора должны быть конгруэнтны. Иными словами, если дан единичный вектор  $OA$  и окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $OA$ , то каждый единичный вектор должен быть равен некоторому вектору  $OP$ ,

где точка  $P$  лежит на этой окружности. Так как точка  $P'$ , для которой  $OP' = -OP$ , также лежит на окружности, то мы имеем возможность выбрать в качестве единичного вектора для любой системы коллинеарных векторов любой из двух векторов, противоположных один другому. Поэтому мы можем сравнивать только абсолютные значения величин неколлинеарных векторов; отличить их алгебраические значения невозможно. Это абсолютное значение мы называем расстоянием (длиной). Мы можем определить его следующим образом. Пусть  $OA$  — произвольная пара различных точек, которую мы назовем *единицей расстояния (длины)*. Тогда *расстоянием* от точки  $P$  до точки  $Q$  мы будем называть число, соответствующее той точке  $D$  прямой  $AB$ , для которой пара  $PQ$  конгруэнтна паре  $OD$  и которая имеет положительную координату в шкале, определяемой на прямой  $OA$  точками  $O=0$ ,  $A=1$  и  $P_\infty=\infty$  ( $P_\infty$  есть бесконечно удаленная точка прямой  $OA$ ). Расстояние от точки  $P$  до точки  $Q$  может быть обозначено символом *расст.* ( $PQ$ ).

Из этого немедленно вытекает, что расстояние между точками  $P$  и  $Q$  определяется однозначно и что оно будет положительно, если  $P \neq Q$ , и равно нулю, если  $P = Q$ , более того, *расст.* ( $PQ$ ) = *расст.* ( $QP$ ). Далее, если  $A, B, C$  суть три точки, расположенные на прямой таким образом, что точка  $B$  лежит между точками  $A$  и  $C$ , то мы имеем

$$\text{расст.}(AB) + \text{расст.}(BC) = \text{расст.}(AC).$$

**71. Длина дуги окружности.** Мы укажем также в немногих словах, как определяется длина окружности или длина любой ее дуги. Пусть  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  суть  $n$  точек окружности, расположенных в порядке  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Если мы положим

$$p = \text{расст.}(P_1P_2) + \text{расст.}(P_2P_3) + \dots + \text{расст.}(P_nP_1),$$

то можно показать, что для любой заданной окружности числа  $p$  при любом возможном расположении точек  $P_i$  не превосходят некоторого определенного числа. Наименьшее из всех чисел, больших  $p$ , число  $c$  называется *длиной* окружности. Можно также показать, что если  $c$  и  $c'$  суть длины двух окружностей с центрами  $O$  и  $O'$  и радиусами  $OP$  и  $OP'$ ,

соответственно, то

$$\frac{c}{c'} = \frac{\text{расст.}(OP)}{\text{расст.}(O'P')}.$$

Если мы примем  $O'P'$  за единицу расстояния и обозначим расст. $(OP)$  через  $r$ , то будем иметь

$$c = 2\pi r,$$

где константа  $c'$  обозначена через  $2\pi$ .

Подобным же образом мы можем определить и *длину дуги* окружности, разумея под дугой  $PQ$  одну из двух частей окружности, на которые делят ее две различные точки  $P$  и  $Q$ . Для этого ограничим точки  $P_i$  точками искомой дуги и будем поступать так же, как и выше. Тогда, как легко показать, если  $B$  есть любая точка дуги  $AC$  и если дуги  $AB$  и  $BC$  содержатся в дуге  $AC$ , то

$$\text{длина дуги } AB + \text{длина дуги } BC = \text{длине дуги } AC.$$

**72. Угол.** Каждая точка  $O$  обыкновенной прямой на евклидовой плоскости делит эту прямую на две части; каждая из этих частей называется *лучом* (или *полупрямой*), *выходящим из точки  $O$* . Два (различных) луча, исходящих из точки  $O$  и лежащих на одной и той же прямой, носят название *противоположных*. Фигура, образованная двумя лучами, исходящими из точки  $O$ , называется *углом*; точка  $O$  называется *вершиной*, а лучи — *сторонами* угла.

Мы подготовлены теперь к тому, чтобы ввести меру угла. Положим, что нам дан определенный угол с вершиной  $O$  и сторонами  $OA$  и  $OM$ , и  $A'$  есть еще одна какая-либо точка на луче  $OA$ . Пусть окружности с общим центром в точке  $O$  и радиусами  $OA$  и  $OA'$  встречаются вторую сторону угла в точках  $B$  и  $B'$  (соответственно) и пусть дуга  $AB$  есть одна из дуг, на которые точки  $A$  и  $B$  делят первую окружность. Возьмем на этой дуге произвольную точку  $P$ ; луч  $OP$  пересечет вторую окружность в точке  $P'$ . Положим, что  $A'B'$  есть та из дуг, которая содержит точку  $P'$ . Мы можем тогда доказать, что если  $s$  и  $s'$  суть длины дуг  $AB$  и  $A'B'$ , в том смысле, как мы это определили выше, а  $r$  и  $r'$  — соответствующие расстояния  $OA$  и  $OA'$ , то  $s'/r' = s/r$ . Это отношение может быть поэтому принято за меру угла.

Метод этот знаком читателю, и нам нет необходимости входить в дальнейшие его детали.

Пользуясь этим, можно определить обычным путем тригонометрические функции как отношения между определенными расстояниями с обычными соглашениями о знаках.

Но можно подойти к установлению меры угла и с другой точки зрения. Положим, что стороны некоторого угла с вершиной  $O$  встречаются бесконечно удаленную прямую в двух точках  $P$  и  $Q$ ; пусть, далее, стороны другого угла с вершиной  $O'$  пересекают бесконечно удаленную прямую в точках  $P'$ ,  $Q'$ . Заданная в определенном порядке (ориентированная) пара прямых  $OP$ ,  $OQ$  будет конгруэнтна ориентированной же паре  $O'P'$ ,  $O'Q'$  в том и только в том случае, если будет иметь место равенство

$$\Re(PQ, I_1 I_2) = \Re(P'Q', I_1 I_2),$$

где  $I_1$  и  $I_2$  суть циклические точки. Это означает, что сложное отношение  $\Re(I_1 I_2, i_1 i_2) = \Re(PQ, I_1 I_2)$ , где  $I_1, I_2, i_1, i_2$  суть соответственно прямые  $OP, OQ, OI_1, OI_2$ , может быть принято за меру угла со сторонами  $I_1, I_2$  или, говоря точнее, за меру для ориентированной пары прямых  $I_1, I_2$ . Мера эта является числом, которое однозначно определяется каждой ориентированной парой прямых и не изменяется, если заменить эту пару другой, конгруэнтной ей, парой прямых. Было бы, однако, желательно, чтобы наша мера  $m$  удовлетворяла соотношению

$$m(I_1 I_2) + m(I_2 I_3) = m(I_1 I_3),$$

где  $I_1, I_2, I_3$  — три сходящиеся в одной точке прямые; между тем, соответствующие сложные отношения удовлетворяют совсем другому соотношению. В самом деле, как легко проверить,

$$\Re(I_1 I_2, i_1 i_2) \cdot \Re(I_2 I_3, i_1 i_2) = \Re(I_1 I_3, i_1 i_2).$$

Это показывает, что если мы положим

$$m(I_1 I_2) = c \ln \Re(I_1 I_2, i_1 i_2), \quad (1)$$

где  $c$  есть произвольная постоянная, то будет удовлетворяться требуемое соотношение. Что эта мера действительно эквивалентна выведенной нами выше мере для углов, легко

усмотреть, если исходить из соотношения Эйлера

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

Положим, как и раньше, что прямые  $l_1, l_2$  встречаются бесконечно удаленную прямую в точках  $P, Q$ , и пусть координаты точек  $P, Q, I_1, I_2$  в системе прямоугольных координат будут соответственно  $(p, 1, 0), (q, 1, 0), (i, 1, 0), (-i, 1, 0)$ ; тогда имеем

$$\Re(l_1 l_2, i_1 i_2) = \Re(PQ, I_1 I_2) = \frac{p-i}{p+i} : \frac{q-i}{q+i}.$$

Если в тригонометрической форме комплексное число  $p + i = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ , а  $q + i = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ , то для написанного выше сложного отношения мы получим значение  $e^{2i(\theta_2 - \theta_1)}$ . Полагая теперь  $\theta_2 - \theta_1 = \theta$ , будем иметь

$$\ln \Re(l_1 l_2, i_1 i_2) = 2i\theta.$$

Если мы еще выберем для константы  $c$  из соотношения (1) значение  $c = -i/2$ , то получим окончательно

$$m(l_1 l_2) = -\frac{i}{2} \ln \Re(l_1 l_2, i_1 i_2) = \theta. \quad (2)$$

Эта формула, выражающая меру угла с помощью мнимых прямых, представляет интерес в силу ее аналогии с подобными же формулами в так называемых неевклидовых геометриях, к рассмотрению которых мы теперь переходим.

**73. Неевклидовы геометрии.** Действительное коническое сечение делит действительные точки проективной плоскости на три класса: на *внутренние точки*, *внешние точки* и *точки, лежащие на самом коническом сечении*. Внутренние точки характеризуются тем свойством, что каждая действительная прямая, проходящая через внутреннюю точку, встречается коническое сечение в двух действительных точках, в то время как через любую внешнюю точку всегда можно провести действительные прямые, не имеющие с коническим сечением общих действительных точек. Через каждую внешнюю точку всегда можно провести две различные действительные касательные к коническому сечению; между тем, действительных касательных, проходящих через внутреннюю точку, не существует. Очевидно, всякая действительная коллинеация,



оставляющая инвариантным коническое сечение, преобразует внутренние его точки снова во внутренние точки.

Положим, что в проективной плоскости нам дано действительное коническое сечение. Это коническое сечение мы назовем *абсолютным коническим сечением* или *просто абсолютом*. Группу всех коллинеаций на плоскости, оставляющих инвариантным это коническое сечение, будем называть *гиперболической метрической группой* плоскости, а связанную с ней геометрию — *гиперболической метрической геометрией* на плоскости. Внутренние точки этого конического сечения мы будем называть *обыкновенными точками*, а точки, лежащие на абсолюте или внешние по отношению к нему, — *идеальными* точками. Прямая, содержащая только идеальные точки, есть *идеальная* прямая; если прямая содержит более одной обыкновенной точки, то все обыкновенные точки этой прямой образуют *обыкновенную прямую*. Обыкновенные точки и прямые образуют так называемую *гиперболическую плоскость*. Две прямые, содержащие обыкновенные точки, называются *параллельными*, если их общая точка принадлежит абсолюту; *перпендикулярными* называются прямые, сопряженные относительно абсолюта. Две фигуры на гиперболической плоскости называются *конгруэнтными*, если они соответствуют одна другой при некотором преобразовании гиперболической метрической группы.

Геометрия, соответствующая этой группе преобразований и данным выше определениям, имеет много общих теорем с эвклидовой метрической геометрией. Например, две различные обыкновенные точки принадлежат одной и только одной обыкновенной прямой; две различные обыкновенные прямые не могут иметь более одной общей обыкновенной точки; через данную обыкновенную точку проходит одна и только одна обыкновенная прямая, перпендикулярная данной обыкновенной прямой. Основные свойства конгруэнтности, расположения точек и непрерывности в гиперболической геометрии будут те же, что и в эвклидовой. Но предложения, относящиеся к параллельным прямым в этих двух геометриях, коренным образом отличаются друг от друга. В самом деле, из данных нами определений, очевидно, следует, что *через любую обыкновенную точку, не лежащую на данной обыкновенной прямой, проходят две параллельные ей прямые*

*и еще бесчисленное множество обыкновенных прямых, не встречающих нашей прямой.*

Так называемый постулат Эвклида о параллельных послужил объектом многочисленных исследований и размышлений, начиная со времен Эвклида. Этот постулат равносильен предложению эвклидовой геометрии о том, что через заданную точку, не лежащую на данной прямой, проходит одна и только одна параллельная ей прямая. Сам Эвклид не был, повидимому, вполне удовлетворен этим постулатом. В своих „Началах“ он избегает пользоваться им столь долго, как это только возможно. Его ближайшие преемники пытались разрешить задачу доказательства постулата о параллельных при помощи других постулатов, и в течение всех последующих столетий, отмеченных активностью в области геометрических исследований, эта проблема продолжала привлекать внимание геометров. В конце концов стали подозревать, что задача эта неразрешима. Наконец, Н. И. Лобачевский (1829) и И. Боляни (1832), независимо один от другого, опубликовали цельную систему геометрических теорем, основанную на существенно отличном от эвклидова постулате, а именно, на том, что через заданную точку можно провести более одной прямой, параллельной данной прямой\*. Немного лет спустя (1851) Бернард Риман показал возможность построения неэвклидовой геометрии другого рода — так называемой *эллиптической геометрии*, в которой через заданную точку нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной прямой. Артур Кэли впервые фактически показал (1859), что обе эти геометрии — гиперболическая геометрия Лобачевского — Боляни и эллиптическая геометрия Римана — могут быть определены как геометрии, принадлежащие подгруппам проективной группы, хотя он и не формулировал этих идей на основе соображений, относящихся к теории групп. Вспомним, что именно Кэли принадлежат слова „проективная геометрия есть вся геометрия“.

Нетрудно получить выражение для расстояния между двумя точками в гиперболической плоскости, так же как и выраже-

---

\* Н. И. Лобачевский не только опубликовал основы гиперболической геометрии, как указано в тексте, на три года раньше Боляни, но и дал ей неизмеримо более глубокое развитие. (*Прим. ред.*)

ние для угла между двумя прямыми на этой плоскости. Аналогия с полученной ранее формулой (стр. 168) непосредственно очевидна и отражает в себе аналогию между евклидовой и гиперболической геометриями. Положим, что  $A$  и  $B$  суть две обыкновенные точки, и пусть прямая  $AB$  встречает абсолют в точках  $A_\infty$  и  $B_\infty$ ; обозначения выбраны так, чтобы точки были расположены в порядке  $A_\infty, A, B, B_\infty$ . Если  $A', B', A'_\infty, B'_\infty$  есть другая определенная таким же образом четверка точек, то легко показать, что ориентированная пара точек  $A, B$  будет конгруэнтна ориентированной паре  $A', B'$  в том и только в том случае, если будет иметь место равенство

$$\Re(AB, A_\infty B_\infty) = \Re(A'B', A'_\infty B'_\infty).$$

В соответствии с этим определяем расстояние  $(AB)$  между точками  $A$  и  $B$  с помощью равенства

$$\text{расст.}(AB) = k \ln \Re(AB, A_\infty B_\infty).$$

Сложное отношение, которое входит в это определение, имеет при принятых нами обозначениях положительное значение, и, следовательно, логарифм его будет действительным числом. Это действительное значение логарифма (или число ему пропорциональное), по определению, принимается за искомое расстояние. Отсюда легко следует, что

$$\text{расст.}(AB) = \text{расст.}(BA);$$

также, если  $A, B, C$  суть три коллинеарные обыкновенные точки, расположенные в указанном порядке, то

$$\text{расст.}(AB) + \text{расст.}(BC) = \text{расст.}(AC).$$

Постоянная  $k$  получит определенное значение, если некоторую определенную пару точек  $OP$  принять за единицу расстояния. Заметим, что при таком определении расстояния обыкновенная прямая имеет бесконечную длину.

По аналогии (а также в силу двойственности, так как абсолютное коническое сечение является образом, двойственным самому себе) определяем меру угла. Пусть  $a, b$  будут две обыкновенные прямые, встречающиеся в обыкновенной точке  $O$ , и пусть  $i_1, i_2$  будут две (мнимые) касательные к абсолюту из точки  $O$ . Мы определяем теперь меру ориен-

тированной пары прямых положением

$$\theta = m(ab) = -\frac{i}{2} \ln \Re(ab, i_1 i_2).$$

Так называемая *эллиптическая метрическая геометрия* представляет собой геометрию, связанную с группой действительных коллинеаций, оставляющих инвариантным (некоторое) мнимое коническое сечение. Мы примем на веру тот факт, что такая группа — *эллиптическая метрическая группа* — действительно существует; доказательство ее существования (например, аналитическим путем) не представляет особого труда. В этой геометрии все действительные точки проективной плоскости будут обыкновенными точками. Каждые две обыкновенные прямые пересекаются в обыкновенной точке; иными словами, параллельных прямых не существует. Две прямые будут *перпендикулярны*, если они являются сопряженными относительно абсолютного конического сечения и т. д. Выражения для расстояния и угла совершенно аналогичны полученным выше формулам гиперболической геометрии с небольшими изменениями, проистекающими от того, что абсолютное коническое сечение будет в этом случае мнимым.

Я надеюсь, что сказанного здесь достаточно, чтобы дать читателю некоторое представление о том, как возникают эти неевклидовы геометрии и в каком отношении они находятся к обычной евклидовой геометрии. Названия *гиперболическая* и *эллиптическая*, присвоенные этим геометриям, имеют своим источником (по аналогии с классификацией проективных соответствий на прямой) то обстоятельство, что в случае гиперболической геометрии прямая, содержащая обыкновенные точки, встречается абсолют в двух различных действительных точках, в то время как в эллиптической геометрии такая прямая пересекает абсолют в двух сопряженных мнимых точках. Евклидову геометрию часто называют, по аналогии с предшествующей терминологией, *параболической метрической геометрией*, в силу того, что действительная прямая встречается бесконечно удаленную прямую (служащую в этом случае абсолютом) в единственной (действительной) точке. В самом деле, можно показать, что евклидову геометрию

можно рассматривать как предельный случай обеих геометрий — гиперболической и эллиптической.

Читателя, который пожелает более обстоятельно ознакомиться с неевклидовой геометрией, отсылаем к следующим сочинениям: дальнейшие детали проективной трактовки предмета, которые здесь только намечены, читатель найдет в книге О. Веблена и Дж. Юнга, *Проективная геометрия*, Бостон — Нью-Йорк, 1918, т. II, гл. VIII; элементарный исторический очерк и конкретное изложение гиперболической геометрии — в книге Дж. Юнга, *Лекции об основных идеях алгебры и геометрии* (Нью-Йорк, 1911, лекции II и III); более обстоятельный исторический обзор и частично изложение самого содержания предмета — в книге Р. Бонола, *Неевклидова геометрия\**. Кроме того, на английском языке имеются еще книги Дж. Л. Кулиджа\*\*, *Элементы неевклидовой геометрии*, и Г. П. Мэннинга\*\*\* (Бостон, 1901).

---

\* Имеется русский перевод А. Р. Кулишера с дополнением А. В. Васильева (СПБ, 1910). (*Прим. ред.*)

\*\* Книга Кулиджа [J. L. Coolidge, *The Elements of Noneuclidean Geometry*, Oxford, 1909 (переиздана в 1927 г.)] до сих пор представляет собой наиболее обстоятельное изложение неевклидовой геометрии. Это сочинение было удостоено премии Н. И. Лобачевского. Однако нужно сказать, что оно доступно только очень хорошо подготовленному читателю. Другим обстоятельным сочинением по неевклидовой геометрии, выполненным в проективной схеме, является книга Ф. Клейна, имеющаяся в русском переводе: Ф. Клейн, *Неевклидова геометрия*, ОНТИ, М. — Л., 1936. (*Прим. ред.*)

\*\*\* Изложение основ неевклидовой геометрии можно найти в различных сочинениях; укажем элементарные, но хорошо выполненные изложения гиперболической геометрии:

П. А. Широкоев, *Краткий очерк основ геометрии Лобачевского*, сборник „Н. И. Лобачевский“, Изд. АН СССР, М. — Л., 1943.

И. М. Гуль, *Геометрия Лобачевского*, изд. АПН РСФСР, М. — Л., 1947.

Изложение эллиптической геометрии можно найти в книге С. А. Богомолова, *Введение в неевклидову геометрию Римана*, ГТТИ, М. — Л., 1934. (*Прим. ред.*)

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолют 169

Абсолютная или ортогональная инволюция 84, 90, 158; абсолютное коническое сечение 169

Абсцисса 133

Алгебра вурфов 119, — прямых или плоскостей 129, — точек 120 и сл.  
Апалитическое выражение вращения 162, — — движения 161, — — коллинеаций 144 и сл., — — линейного ортогонального отражения 160, — — параллельного перенесения 152, — — преобразования подобия 159, — — проективного соответствия 125 и сл., 132, 137, 142

Асимптоты 88, 149

Ассоциативный закон преобразования 107, — — сложения и умножения 120, 122, 154

Аффинная группа и аффинная геометрия 117, 148 и сл., — плоскость 148

Базисные точки (прямые) 141

Бесконечно удаленная точка 18, 83, 148, — — прямая 19, 83, 148; бесконечно удаленные циклические точки 157, 164; свойства символа  $\infty$  125 и сл.

Биссектриса 91

Брианшона теорема 70, 75, — точка 70

Вектор 152, — единичный 154, 164, — нулевой 152, — противоположный 153; величина вектора 154; коллинеарные векторы 153; отношение векторов 154; сумма векторов 153

Вершина угла 166

Вершины конического сечения 102, — полного четырехсторонника и четырехугольника 33, — простого шестиугольника 67, — противоположные полного четырехсторонника и четырехугольника 33, — противоположные простого шестиугольника 67, — тетраэдра 34, — треугольника 32

Взаимно однозначное соответствие 10, 12, 18 и сл.

Внешние точки конического сечения 168

Внутренние точки конического сечения 168

Вращение 162

„Вырожденная“ кривая второго порядка 64

Вычитание 121

Гармоническая гомология 116

Гармоническая четверка прямых 43, — — точек 41; гармонические четверки 41 и сл.; гармонически связанная точка 50; пары гармонической четверки разделяют одна другую 49, 50; середина отрезка как точка, гармонически сопряженная с бесконечно удаленной точкой 84; сложное (ангармоническое) отношение 130; теоремы о гармонических четверках 41 и сл., 49, 57

Геометрия аффинная 148 и сл., — гиперболическая 169, — определяемая группой 146, — параболическая 172, — проективная, ее определение 13 и сл., — эвклидова метрическая 157 и сл., — эллиптическая 170, 172

Гипербола 14, 87, 149

Гиперболическая инволюция 59, — метрическая геометрия 169, — метрическая группа 169, — плоскость 169; гиперболическое проективное соответствие 55

Главные оси 97

Гомология 115, — гармоническая 116, — особенная 115; ось гомологии перспективной коллинеации 115; ось гомологии проективного соответствия 53; центр гомологии 54, 115

Грани тетраэдра 34

Группа аффинная 117, 148 и сл., — всех движений на плоскости 146, — инвариантная по отношению к преобразованию 111, — общая коллинеаций 113, — одно-транзитивная 118, — определяющая геометрию 146, — параллельных перенесений 149, — преобразований 107, — эвклидова метрическая 157; общая проективная группа прямой 107

Движение 160

Двойная точка или прямая 55, 126, 129; двойные элементы 55; мнимые двойные точки 129; точки находятся в двойном соответствии друг с другом 57

Двойственности принцип 25, — — в пространстве 29 и сл., — — на плоскости 31, 81; двойственные предложения 25, 29

Дезарга конфигурация 36 и сл., — теорема 14, 38; метрическая специализация теоремы Дезарга 22

Действительные пространства 112

Диагонали 33, — параллелограмма 86, 149; диагональные точки четырехугольника 33; диагональные точки четырехугольника не лежат на одной прямой 41

Диаметр конического сечения 88, 149

Директриса конического сечения 102

Дистрибутивный закон 123

Длина дуги окружности 165

Единичный вектор 154, 164

Замкнутая (проективная) прямая 20 и сл.

Идеальные плоскости 27, — точки 18 и сл., 27, 148, — элементы 17 и сл., — элементы в гиперболической геометрии 169

Инвариантная по отношению к преобразованию группа 111, — — — фигура 108

- Инволюция абсолютная или ортогональная 84, 90, 157, — и полный четырехугольник 59, — круговая 91, — сопряженных точек на прямой 80, — эллиптическая 59; двойные точки инволюции 58; инволютивное преобразование 107; метрические свойства инволюции 98; общая сопряженная пара двух инволюций 60, 63; определение инволюции 58; построение инволюции 100 и сл.; теоремы об инволюциях 58 и сл., 89; три пары входят в состав инволюции 58; центр инволюции 98
- Инцидентность точек и прямых 13, — на плоскости 27 и сл.
- Исчезающие точки 156
- Касательная к кривой второго порядка 65, 71, — — — — образует пучок второго порядка 79
- Классификация конических сечений 87, 88, — проективных соответствий 55
- Коллинеарные векторы 153, — точки 32
- Коллинеация 112, — перспективная 115, 116, — проективная 112, 115, — аналитическое выражение коллинеаций 144 и сл.; коллинеации, оставляющие инвариантным данное коническое сечение 118; общая группа коллинеаций на плоскости 113; основная теорема для коллинеаций 114; теоремы о коллинеациях 114 и сл.; центр и ось перспективной коллинеации 115
- Коммутативность операции сложения 120, — — умножения 122; коммутативные преобразования 106
- Конгруэнтные фигуры 160, 163, — — в гиперболической геометрии 169; параллельно конгруэнтные фигуры 150
- Коническое сечение 14, — — как фигура, двойственная самой себе 74; абсолют 169; вершина и директриса конического сечения 102; внешние и внутренние точки конического сечения 168; классификация конических сечений 87, 88, 149; метрическое определение конического сечения 101 и сл.; метрические свойства конических сечений 88 и сл.; оси конического сечения 92; полюс и поляра по отношению к коническому сечению 76, 77; уравнение конического сечения 143 и сл.; фокусы конического сечения 93 и сл., 100; центральные конические сечения 87 и сл., 149; центр и диаметр конического сечения 87 и сл., 149; эксцентриситет конического сечения 103
- Конфигурация плоская 37 и сл. — Дезарга 37 и сл.; символ конфигурации 37
- Координаты неоднородные 137, — однородные 137 и сл., — прямой на плоскости (линейные) 134, — сопряженные точки и прямой 136, — точек на плоскости 133, — точек на прямой 125; ортогональная система координат 158; ось абсцисс ( $x$ -ов) 133; ось ординат ( $y$ -ов) 133
- Корреляция 113
- Кривая второго порядка 64, — — — „вырожденная“ 64; касательная к кривой второго порядка 65, 71; касательные к кривой второго порядка образуют пучок второго порядка 74; построение кривой второго порядка 66, 69; пучок прямых второго по-



- рядка 65; теоремы о кривой второго порядка 65 и сл.; точка прикосновения пучка прямых второго порядка 66
- Круговая инволюция 91
- Линейное уравнение точки 135; линейные ортогональные отражения 158, 160
- Луч 166
- Медиана треугольника 87
- Метрические свойства 14, 82 и сл., — — инволюции 98, — — конического сечения 88 и сл.; метрическое определение конического сечения 101 и сл; метрическое пространство 15
- Мнимые элементы 129
- Направление на проективной прямой 22
- Неоднородные координаты 137
- Непрерывное движение по прямой 149, — преобразование 50
- Несобственные точки, прямые и плоскости 83, 148
- Неэвклидовы геометрии 169 и сл.
- Нормали сопряженные 93
- Нулевой вектор 152
- Обратное преобразование 105; обращенные преобразования подобия 157; проективное соответствие обратного типа 61
- Общая проективная группа прямой 107, — — — коллинеаций на плоскости 113
- Обыкновенные точки и прямые 148, — — — — в гиперболической геометрии 169
- Однородные координаты 137 и сл.
- Одно-транзитивная группа 118
- Окружность 92, 163; длина дуги окружности 165, 166
- Определитель проективного соответствия 127
- Ординаты 133
- Ортогональная инволюция 84, 90, 157, — система координат 158; ортогональные линейные отражения 158, 160
- Основная теорема проективной геометрии на прямой 52, — — — — на плоскости 114, — — о ряде точек, порождаемом четырехугольником 40
- Основные формы первой ступени 45, — точки шкалы 125
- Особенная гомология, определение, центр и ось особенной гомологии 115
- Ось гомологии 53, 114, — конического сечения 92, — конического сечения главная 97, — особенной гомологии 114, — параболы 92, — перспективного соответствия 33, 47, —  $x$ -ов (абсцисс) 133, —  $y$ -ов (ординат) 133
- Отношение векторов 154
- Отражения линейные ортогональные 158, 160
- Отрезок проективной прямой 20
- Парабола 14, 88, 149; ось параболы 92; фокус параболы 96
- Параболическая метрическая геометрия 172; параболическое проек-

- тивное соответствие 55; теорема о параболическом проективном соответствии 57
- Параллелограм 86, 149
- Параллельно конгруэнтные фигуры 150
- Параллельное перенесение 149; аналитическое выражение параллельного перенесения 152; группа параллельных перенесений 149 и сл.; перенесение параллельно прямой 149
- Параллельные прямые 12, 13, 18, 19, 22, 83, 84, 85, 149, — — в гиперболической геометрии 169
- Параметрический метод выражения элементов ряда точек (пучка прямых) 140
- Паскаля теорема 67 и сл.; паскалева прямая 69; особые случаи теоремы Паскаля 71 и сл.
- Перемещение 160
- Период (порядок) преобразования 107; периодическое преобразование 107
- Перпендикулярные прямые 83, 84, 90, 157, — — в гиперболической геометрии 169, — — в эллиптической геометрии 172
- Перспективное преобразование 12, 17, 18, 20, 26, 33, 48, — рисование 9, 10; перспективные коллинеации 115, 116; перспективные пучки 45, 46; перспективные треугольники 15, 39; перспективные фигуры 33
- Перспективное соответствие 12, 17, 18, 20, 26, 33, 46, 48, — — относительно оси 34, 47, — — относительно центра 34, 47; ось перспективного соответствия 33, 47; символ перспективного соответствия 46; центр перспективного соответствия 18, 33, 47
- Плоское поле 112
- Плоскость идеальная 127, — несобственная 83, — проективная 20, — евклидова 148; пучок плоскостей 45
- Подгруппа 108
- Подобные фигуры 157
- Полный  $n$ -вершинник 35, — пятивершинник 35, — пятигранник 35, — четырехсторонник 33, — четырехугольник 33, 72
- Полупрямая 166
- Полюс прямой по отношению к коническому сечению 77
- Поляра точки по отношению к коническому сечению 76; полярная система 78 и сл.; теоремы о поляре 76 и сл.
- Порядок конечный 107, — преобразования 107
- Построение инволюции 100 и сл., — кривой второго порядка 66, 69 и сл., — фокусов конического сечения 100
- Преобразование инволютивное 107, — конечного порядка 107, — перспективное, см. перспективное преобразование, — подобия 157, — подобия обращенное 157, — подобия прямое 157, — проективное 13, 45, 47, — проективное эллиптическое 55, — соответствий 110, — тождественное 106; группа преобразований 107; произведение преобразований 106; символическое представление преобразований 105 и сл.
- Принцип двойственности 25, — — в пространстве 29 и сл., — — на плоскости 31, 81; двойственные предложения 25, 29

- Проективное преобразование 13, 45, 47, — — есть непрерывное преобразование 50, — — форм (образов) второй ступени 112, — пространство 15, 16, 26 и сл; геометрия, характеризующая проективным преобразованием 13 и сл; общая проективная группа прямой 107; основная теорема проективной геометрии 51; отрезок проективной прямой 20; „проективная геометрия есть вся геометрия“ 14; проективная плоскость 20; проективная прямая 20, 21; проективные коллинеации 112, 115; проективные свойства 14; проективные и метрические свойства 82 и сл.
- Проективное соответствие 13, 45, 47, — —  $AA'BB' \wedge A'AB'B$  58, — — как последовательность перспективных преобразований 47, — — между элементами образов второй ступени (третьей ступени) 112, — — обратного типа 61, — — прямого типа 61, — — с самому себе соответствующим элементом 52; аналитическое выражение проективного соответствия 125 и сл; 132, 137, 142; классификация проективных соответствий 55; основная теорема о проективных соответствиях 48, 51; теоремы о проективных соответствиях 48 и сл., 109 и сл., 126 и сл.; символ проективного соответствия 47; степень проективного соответствия 156
- Проектирование и сечение 9, 10, — фигуры из точки 10, 18
- Произведение преобразований 106
- Простой пятиугольник 72, — четырехугольник 72, — шестиугольник 67
- Пространство проективное 15, 16, 27 и сл.
- Противоположный вектор 153
- Противоположные вершины и стороны 33, — — — — простого плоского шестиугольника 67, — лучи 166
- Прямая бесконечная или несобственная 19, 83, 148, — идеальная 19, — проективная 20, 21; двойные прямые 55; диагональные прямые 33; линейные координаты прямой 134; параллельные прямые 12, 13, 18, 19, 22, 83 и сл., 149; перпендикулярные прямые 83, 84, 90; прямые в гиперболической геометрии 169; пучок прямых 45; связь прямых 45; сопряженные прямые 79; сходящиеся прямые 32; точечное уравнение прямой 135
- Пучок прямых, плоскостей, точек 45, 140 и сл., — прямых второго порядка 65; точка прикосновения пучка кривых второго порядка 66, 71
- Пятивершинник полный 35 и сл.
- Пятигранник полный 35
- Радиус окружности 163; фокальные радиусы конического сечения 103
- Разделение гармонических пар 50, — пар точек 49
- Расстояния 164, 165, — в гиперболической геометрии 171
- Рациональности сеть 50
- Ребра тетраэдра 34
- Результат двух преобразований 106
- Референции сеть 139
- Ряд, порождаемый полным четырехугольником 41; основная теорема о четырехугольнике 40

- Связка прямых 45  
Середина отрезка 83, 85, 151  
Сеть рациональности 50  
Сеть референции 139  
Сечение и проектирование 9, 10, — плоскостью 10  
Символическое представление соответствий 105 и сл.  
Симметрия 162; симметричные фигуры 163  
Сложение векторов 154, — точек 119; ассоциативный и коммутативный законы сложения 120  
Сложное отношение 130 и сл.  
Соответствие взаимно однозначное 10, 12, 20, — двойное 57, — перспективное 12, 17, 18, 20, 26, 33, 46, 48, — проективное 13, 45, 47  
Степень проективного соответствия 156  
Стороны полного четырехугольника (или четырехвершинника) 33, — — — противоположные 33, — — шестиугольника 67, — треугольника 32, — угла 166  
Сумма векторов 153
- Тетраэдр 34  
Тождество (тождественное преобразование) 106  
Точечное уравнение прямой 135  
Точки бесконечно удаленные, идеальные, несобственные 18 и сл., 83, 148, — двойные 55, 126, — диагональные 33, 55, — исчезающие 156, — конического сечения внешние и внутренние 168, — обыкновенные 18, 148, — основные шкалы 125, — прикосновения 65, 71, — сопряженные 79, — циклические 157, 164; координаты точек на прямой 125; координаты точек на плоскости 133; линейное уравнение точек 135; прямолинейный ряд точек 45; сложение и умножение точек 121  
Треугольник 13, 14; определение перспективного треугольника 33; перспективные треугольники 15, 39
- Угол 166, — в гиперболической геометрии 171, 172  
Умножение 121; ассоциативный и коммутативный законы умножения 122  
Уравнение конического сечения 147 и сл., — линейное точки 135, — точечное прямой 136
- Фигура вписана в коническое сечение 74, — описана около конического сечения 74; подобные фигуры 157  
Фокальные радиусы конического сечения 103  
Фокусы конического сечения 93 и сл.; построение фокусов конического сечения 100 и сл.
- Центр гомологии 54, 114, — инволюции 98, 156, — конического сечения 88, 149, — окружности 163, — особенной гомологии 114, ортогонального линейного отражения 158, — перспективного соответствия 18, 33, 47

Центральное коническое сечение 88, 149, — проективное соответствие 34, 47

Четырехсторонник 13, 14, — полный 33

Четырехугольник полный 33, — простой 35

Шестиугольник простой плоский 67; вершины и стороны, противоположные вершины и стороны простого плоского шестиугольника 67

Шкала 125

Эвклидова метрическая геометрия 157 и сл., — — группа 157 и сл., — плоскость 157

Эксцентриситет конического сечения 103

Эллипс 14, 88, 149

Эллиптическая геометрия 170, 172, — инволюция 59, — метрическая группа 172; эллиптическое проективное соответствие 55

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Богомолов С. А. 173

Больяи И. 170

Бонола Р. 173

Веблен О. 5, 8, 30, 69, 147, 173

Вольберг О. 5

Гильберт Д. 38, 40

Глаголев Н. А. 5

Гуль И. М. 173

Дезарг Ж. 16

Ефимов Н. В. 5

Жергонн Ж. Д. 30

Каган В. Ф. 113

Клейн Ф. 16, 113, 146, 173

Кулидж Дж. 173

Кэли А. 14, 83, 170

Леонардо да Винчи 9, 10

Ли Софус 118

Лобачевский Н. И. 170

Мэннинг Г. П. 173

Паскаль Б. 16, 68

Понселе Ж. В. 16, 30

Риман Б. 170

Смит Д. 16

Чеботарев Н. Г. 16

Шаль М. 16

Широков П. А. 173

Штаудт Х. 119

Эвклид 170

Эйлер Л. 168

Юнг Дж. 5, 6, 30, 68 147, 173

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие к русскому изданию . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
Глава I. Вводные понятия . . . . .	9
1. Перспективное рисование . . . . .	9
2. Проектирование и сечение. Соответствие . . . . .	9
3. Проективные преобразования . . . . .	12
4. Проективная теорема . . . . .	14
Глава II. Проективное пространство. Принцип двойственности . . . . .	17
5. Идеальные элементы . . . . .	17
6. Проективная плоскость . . . . .	19
7. Проективное пространство . . . . .	26
8. Принцип двойственности . . . . .	29
9. Элементарные фигуры . . . . .	32
Глава III. Теорема Дезарга. Гармонические четверки . . . . .	36
10. Конфигурация Дезарга . . . . .	36
11. Основная теорема о ряде точек, порождаемом полным четырехугольником . . . . .	40
12. Гармонические четверки . . . . .	41
Глава IV. Проективные соответствия в формах первой степени. Основная теорема проективной геометрии . . . . .	45
13. Основные формы первой степени на плоскости . . . . .	45
14. Теоремы о проективном соответствии . . . . .	48
15. Ось гомологии . . . . .	52
16. Двойные элементы. Эллиптическое, параболическое и гиперболическое проективные соответствия . . . . .	55
17. Инволюции . . . . .	57
Глава V. Теоремы Паскаля и Брианшона . . . . .	64
18. Определение ряда точек второго порядка и пучка прямых второго порядка . . . . .	64
19. Построение кривой второго порядка по ее определению . . . . .	66
20. Теорема Паскаля . . . . .	67

	Стр.
21. Построение точек кривой второго порядка по пяти заданным точкам . . . . .	69
22. Теорема Бриансона . . . . .	70
23. Касательные. Точки прикосновения . . . . .	71
24. Особые случаи теоремы Паскаля . . . . .	71
25. Касательные к кривой второго порядка образуют пучок второго порядка . . . . .	73
26. Полюсы и поляры конического сечения . . . . .	75
27. Полярная система, связанная с коническим сечением . . . . .	78
28. Сопряженные точки. Сопряженные прямые . . . . .	79
29. Принцип двойственности на плоскости . . . . .	81
Глава VI. Метрические свойства . . . . .	82
30. Проективные и метрические свойства . . . . .	82
31. Параллельные прямые. Середина отрезка . . . . .	85
32. Классификация конических сечений . . . . .	87
33. Перпендикулярные прямые. Ортогональная инволюция . . . . .	89
34. Биссектрисы углов . . . . .	91
35. Оси конического сечения . . . . .	92
36. Фокусы конического сечения . . . . .	93
37. Метрические свойства инволюции . . . . .	98
38. Построение инволюции с помощью окружностей . . . . .	100
39. Построение фокусов центрального конического сечения . . . . .	100
40. Метрические определения конического сечения . . . . .	101
Глава VII. Группы проективных преобразований . . . . .	105
41. Символическое представление соответствий . . . . .	105
42. Понятие о группе преобразований . . . . .	107
43. Две важные группы проективных преобразований прямой . . . . .	108
44. Преобразование соответствий . . . . .	110
45. Проективные соответствия в образах второй степени . . . . .	111
46. Группы коллинеации на плоскости . . . . .	117
Глава VIII. Алгебра точек и введение аналитических методов . . . . .	119
47. Сложение точек на прямой . . . . .	119
48. Умножение точек на прямой . . . . .	121
49. Дистрибутивный закон . . . . .	122
50. Алгебра точек на прямой . . . . .	123
51. Аналитическое выражение проективного соответствия . . . . .	125
52. Сложное отношение . . . . .	129
53. Проективное соответствие между двумя различными формами первой степени . . . . .	131

	Стр.
54. Координаты точки и прямой на плоскости . .	132
55. Уравнение прямой . . . . .	134
56. Сопряженные координаты точки и прямой . .	135
57. Однородные координаты на прямой и на плоскости . . . . .	137
58. Прямолинейные ряды точек и пучки прямых .	140
59. Уравнение конического сечения . . . . .	143
60. Коллинеации на плоскости . . . . .	143
<b>Глава IX. Группы и геометрии . . . . .</b>	<b>146</b>
61. Определение геометрии с помощью группы преобразований . . . . .	146
62. Аффинная группа. Аффинная геометрия . . .	148
63. Группа параллельных перенесений . . . . .	149
64. Векторы . . . . .	152
65. Эвклидова метрическая группа. Эвклидова метрическая геометрия . . . . .	157
66. Ортогональная система координат . . . . .	158
67. Аналитическое выражение преобразований эвклидовой группы . . . . .	159
68. Движения . . . . .	160
69. Окружность . . . . .	163
70. Расстояние . . . . .	164
71. Длина дуги окружности . . . . .	165
72. Угол . . . . .	166
73. Неэвклидовы геометрии . . . . .	168
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>174</b>
<b>Именной указатель . . . . .</b>	<b>181</b>

Редактор *Т. Солнцева*  
Технический редактор *Б. Корнилов*  
Корректор *К. Иванова*

\*

Сдано в производство 24/IX-1948 г. Подписано к печати 8/XII 1948 г. А10899  
Печ. л. 11<sup>1</sup>/<sub>2</sub>. Уч.-издат. л. 9,8. Формат 82×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Издат. № 1/306. Цена 11 р. 50 к.  
Заказ № 8291

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова треста «Полиграфкнига» Огиза  
при Совете Министров СССР. Москва, Валуевская, 28.



# СПИСОК ОПЕЧАТОК

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
21	2 сл.	отрезки	отрезок
✓39	20 сл.	треугольник расположен	треугольники расположены
✓42	6 сл.	После слов „точка $O$ совпадает с $O'$ “ пропущено „таким образом, прямые $AA'$ , $BB'$ , $CC'$ и $DD'$ сходятся. Отсюда следует, что треугольники $ABD$ и $A'B'D'$ перспективны относительно точки ( $O=O'$ ), а значит, и относительно оси. Следовательно, точки пересечения соответственных сторон — $AB$ и $A'B'$ , $BD$ и $B'D'$ , $AD$ и $A'D'$ — лежат на одной прямой, т. е. точка $T$ лежит на прямой $PQ$ , что и требовалось доказать“.	
✓59	12 сл.	точка $B$	точка $P$
✓62	4 сл.	$A_1'A$	$A_1'A_1$
✓96	9 >	сопряженная с ней прямая $f'$	сопряженная с ней нор маль $f'$
102	12 >	полюс	фокус
111	5 >	после слова „прямых“ пропущено: „связка плоскостей или связка прямых“	
149	2 >	сохраняет свое направ- ление; это	сохраняет каждую свою прямую; их направление
151	11 >	прямых	прямым
152	9 >	конгруэнтной	конгруэнтно
158	4 >	$m' = 1/m$	$m' = -1/m$
158	6 >	$x_2'' = x_1$	$x_2' = x_1$
158	7 >	$x_1' = -x_2'$	$x_1' = -x_2$
160	10—11 >	$(\alpha^2 + \beta^2 = -1)$	$(-\alpha^2 - \beta^2 = -1)$
161	7—8 >	$(\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 = -1)$	$(-\alpha_1^2 - \beta_1^2 = -\alpha_2^2 - \beta_2^2 = -1)$
161	20 >	осью $BL_\infty$	осью $BL'_\infty$

